# III. リジッド解析空間の $K$ 理論

以下，$(K, |-|)$ を完備非アルキメデス付値体とし，$K^\circ = \{x \in K |\ |x| \leq 1\}$ とする．また $|\pi| < 1$ なる $\pi \in K$ を固定する．$S = \mathrm{Spec}K^\circ$ 上の有限型なスキームあるいは形式的スキーム $\mathcal{X}$ にたいしその**連続的 $K$-群** を

$$K_i^{\mathrm{cont}}(\mathcal{X}) = \text{“}\lim_n\text{”}\, K_i(\mathcal{X}_n) \quad (i \geq 0)$$

で定義する．ここで $\mathcal{X}_n = \mathcal{X} \otimes_{K^\circ} K^\circ/(\pi^{n+1})$ である．一般にスキーム $Z$ にたいし $K_i(Z)$ は Quillen の高次代数的 $K$-群である．特に $K_0(Z)$ は $Z$ 上のベクトル束全体の Grothendieck 群である．また “$\lim\limits_n$” は (アーベル群の) 逆系を表し，アーベル群としての逆極限は

$$\widehat{K}_i^{\mathrm{cont}}(\mathcal{X}) = \varprojlim_n K_i(\mathcal{X}_n) \quad (i \geq 0)$$

で表しこれと区別する．これらの不変量に興味を持つ背景の一つとして変動的ホッジ予想がある．これを簡単に復習する．

$k$ を標数 0 の体とし $K = k((t))$，$K^\circ = k[[t]]$ の場合を考える．$\mathcal{X}$ は $S = \mathrm{Spec}K^\circ$ 上の射影的で滑らかなスキームとし，$Y = \mathcal{X}_1$ をその特殊ファイバーとする．$K_0(Y)$ から $Y$ のドラームコホモロジーへのチャーン特性類写像

$$\mathrm{ch} : K_0(Y)_{\mathbb{Q}} \to H^*_{DR}(Y/k) = \bigoplus_i H^{2i}_{DR}(Y/k)$$

を考える．ここで $K_0(Y)_{\mathbb{Q}} = K_0(Y) \otimes \mathbb{Q}$ である．以下よく知られた同型

$$\Phi : H^*_{DR}(\mathcal{X}/S)^{\nabla=0} \xrightarrow{\cong} H^*_{DR}(Y/k)$$

を用いる．ここで $\nabla$ はガウス - マニン接続による変数 $t$ についての微分である．また $F^i H^*_{DR}(\mathcal{X}/S) \subset H^*_{DR}(\mathcal{X}/S)$ はホッジフィルトレーションを表す．

**Conjecture 0.1.** $\xi \in K_0(Y)_{\mathbb{Q}}$ にたいし次は同値である．

$(i)$ ある $\tilde{\xi} \in K_0(\mathcal{X})_{\mathbb{Q}}$ が存在して $\mathrm{ch}(\tilde{\xi}_{|Y}) = \mathrm{ch}(\xi)$.

$(ii)$ $\Phi^{-1}(\mathrm{ch}(\xi)) \in \bigoplus\limits_i F^i H^{2i}_{DR}(\mathcal{X}/S)$.

この予想は Grothendieck によるもので**無限小変動的ホッジ予想**とよばれる．**変動的ホッジ予想**とよばれる類似の予想も存在し，両者は本質的に同値であるがこの説明は省略する．よく知られた**ホッジ予想**は (無限小) 変動的ホッジ予想を導く．逆に (全ての) アーベル多様体にたいしての (無限小) 変動的ホッジ予想はホッジ予想と同値である．最近，無限小変動的ホッジ予想に大きな進展が為された．予想の $(i) \Rightarrow (ii)$ は自明である．予想のポイントは，条件 $(ii)$ を用いて与えられた $\xi \in K_0(Y)_{\mathbb{Q}}$ の $K_0(\mathcal{X})_{\mathbb{Q}}$ への持ち上げを構成することである．写像の分解

$$K_0(\mathcal{X})_{\mathbb{Q}} \to \widehat{K}^{\mathrm{cont}}(\mathcal{X})_{\mathbb{Q}} \to K_0(Y)_{\mathbb{Q}}$$

を用いてこの持ち上げのプロセスを 2 段階に分けることができる．始めの $K_0(Y)_{\mathbb{Q}}$ から $\widehat{K}^{\mathrm{cont}}(\mathcal{X})_{\mathbb{Q}}$ への持ち上げの問題を「無限小変形持ち上げ」とよび，次の $\widehat{K}^{\mathrm{cont}}(\mathcal{X})_{\mathbb{Q}}$ から $K_0(\mathcal{X})_{\mathbb{Q}}$ への持ち上げを「代数化」とよぶ．Bloch-Esnault-Kerz[BEK] と Morrow[Mor] は，最初の問題をほぼ一般的な状況で解決することに成功した．

変動的ホッジ予想の「無限小変形持ち上げ」部分がほぼ解決された今，次の重要な問題は「代数化」である．つまり条件 $(ii)$ を用いて

$$\hat{\xi} = (\xi_n)_{n\geq 0} \in \widehat{K}^{\mathrm{cont}}(\mathcal{X}) = \varprojlim_n K_i(\mathcal{X}_n)$$

を $K_0(\mathcal{X})_{\mathbb{Q}}$ に持ち上げることである．各 $\xi_n$ が $\mathcal{X}_n$ 上の直線束の類である場合にはこの問題は Grothendieck の偉業「形式的存在定理」により肯定的に解決されている．一方，[BEK] において写像 $K_0(\mathcal{X})_{\mathbb{Q}} \to \widehat{K}^{\mathrm{cont}}(\mathcal{X})_{\mathbb{Q}}$ は一般には全射からはほど遠いことが示されている．つまり最初の $K_0(Y)_{\mathbb{Q}}$ から $\widehat{K}^{\mathrm{cont}}(\mathcal{X})_{\mathbb{Q}}$ への段階で持ち上げを上手に選ぶ必要があるわけである．現在のところこの問題にたいする解決の糸口は見つかっていない．

この状況に触発され私は M. Kerz 氏と G. Tamme 氏との共同研究 [KST] において，$K_i^{\mathrm{cont}}(\mathcal{X})$ をリジッド幾何を用いて解析する新しい理論を構成した．以下，$p\mathbf{SSet}_*$ で基点付き単体的集合の逆系のなす圏とする．$p\mathbf{SSet}_*$ の対象 $K = (K_i)_{i\in I}$ にたいしその $j$ 次ホモトピー群がアーベル群の逆系

$$\pi_j(K) = “\lim_{i}” \, \pi_j(K_i)$$

として定義される．ここで $\pi_j(K_i)$ は $K_i$ の幾何学的実現のホモトピー群を表す．[KST] の主定理の一つは以下のとおりである．

**Theorem 0.2.** $\mathrm{Rig}_{/\mathrm{K}}$ を $K$ 上の準コンパクトかつ分離的なリジッド空間の圏とすと，半共変的関手

$$KV^\flat : \mathrm{Rig}_{/\mathrm{K}} \to p\mathbf{SSet}_*$$

が存在して次の性質を持つ．$X$ を $\mathrm{Rig}_{/\mathrm{K}}$ の対象とし，$\mathcal{X}$ を $X$ の $K^\circ$ 上の形式的モデルで正則なものとする．また $Y = \mathcal{X}_1$ を $\mathcal{X}$ の特殊ファイバーとする．このとき自然なアーベル群の逆系の長完全系列が存在する．

$$\begin{aligned} \cdots \to K_i^{\mathrm{cont}}(\mathcal{X}) \to KV_i^\flat(X) \to G_{i-1}(Y) \to K_{i-1}^{\mathrm{cont}}(\mathcal{X}) \to KV_{i-1}^\flat(X) \to \cdots \\ \cdots \to K_1^{\mathrm{cont}}(\mathcal{X}) \to KV_1^\flat(X) \to G_0(Y) \to K_0^{\mathrm{cont}}(\mathcal{X}) \to KV_0^\flat(X) \to 0. \end{aligned}$$

ここで $G_i(Y)$ は $Y$ の $G$ 群 *(*$K$ 群の類似で $Y$ 上のベクトル束の代わりに連接層の圏を用いて定義される*)* で，$KV_i^\flat(X) = \pi_i KV^\flat(X)$ $(i \geq 0)$ である．

簡単に言うと $KV_i^\flat(X)$ は $G_i(Y)$ の差を除いて $K_i^{\mathrm{cont}}(\mathcal{X})$ を記述する力を持つわけである．特に変動的ホッジ予想において重要だった $K_0^{\mathrm{cont}}(\mathcal{X})$ を理解するには $KV_0^\flat(X)$ を理解すればよいことになる．これにより変動的ホッジ予想の解決にリジッド幾何学の手法が応用できることが期待される．

## 参考文献


[BEK] S. Bloch, H. Esnault and M. Kerz, *Deformation of algebraic cycle classes in characteristic zero*, arxiv.org/abs/1310.1773.

[Mor] M. Morrow, *A case of the deformational Hodge conjecture via a pro Hochschild-Kostant-Rosenberg theorem*, http://arxiv.org/abs/1310.1900

[KST] M. Kerz, S. Saito and G. Tamme, *$K$-theory of rigid analytic spaces*, in preparation.