IV. モチーフ理論の一般化

モチーフ理論とは，モチフィックコホモロジーのコホモロジー論的定義を与えるもので，モチフィックコホモロジーをあるアーベル圏 (**モチーフの圏**と呼ばれる) における高次の拡大群として捉えることを目的とする (項目 (II) において，正則スキームにたいしては Bloch の高次 Chow 群がモチフィックコホモロジーとして期待される性質を持つと述べたが，これを定義としてはコホモロジー論的手法が適用できない)．1970 年代に Grothendieck がその構想を打ち出して以来，モチーフ理論は哲学的指導原理として多くの優れた研究を導いてきた (例えば Deligne の Weil 予想の解決や混合 Hodge 構造の理論，ゼータ関数の特殊値についての Beilinson 予想)．モチーフの圏自体の構成はいまだ未解決であるが，Voevodsky はモチーフの圏の導来圏にあたる三角圏を構成し，これが望まれた基本的性質を持つことを証明した (例えば高次 Chow 群がこの圏の射のなす群として表されることを示した)．この業績が，彼にフィールズ賞が与えられた理由のひとつとなったことからもモチーフ理論がいかに重要視されてきたかがわかる．Voevodsky が構成したモチーフの三角圏は，ホモトピー不変性を満たす層 (**ホモトピー不変層**) を基本的構成要素として用いる．ホモトピー不変性とは，もともと位相幾何で用いられる基本的概念で，Voevodsky はその代数的類似をモチーフの圏に要請した．しかしこれは Voevodsky の理論に本質的な制約を課す．例えば，代数幾何で重要な微分形式の層や代数群はホモトピー不変性を満たさない．またガロア表現では暴分岐が重要な研究対象であるが，暴分岐はホモトピー不変性を満たさない．よって Voevodsky のモチーフ理論は応用上いまだ未完成な理論であるともいえる．モチーフ理論を一般化する試みはこれまでもいくつかなされてきた (Deligne の 1-motive の Laumon による拡張，Bloch-Esnault による加法的高次 Chow 群など) が，特殊な場合に限られていた．最近の研究 [KSY] において，ホモトピー不変性層を拡張する**相互層**を新たに導入し，Voevodsky が示したホモトピー不変層にたいする基本定理を相互層にまで拡張することに成功した．現在は相互層を用いて Voevodsky のモチーフ圏を拡張する 相互モチーフの圏を構成し，さらに応用を与えることを考えている．

新たなモチーフ理論がもたらす波及効果は計り知れないと感じている．まず新たなモチフィックコホモロジーの理論が展開される．Bloch の高次 Chow 群や Bloch-Esnault の加法的高次 Chow 群の自然な一般化が生じる．私はこの一般化を **モデュラス付き高次 *Chow* 群**として定義し，その研究を [BS] において進めている．また項目 (I) で解説した [KeS] の結果を，新たなモチーフ理論において再解釈し一般化することができるはずである．実際，そこで本質的な役割を果たしたモデュラス付き 0 次 Chow 群 $\mathrm{CH}_0(X, D)$ はモデュラス付き高次 Chow 群の特別な場合である．[KeS] の主結果は**相互モチーフ理論における双対定理**のごく特別な場合として解釈できるはずで，新たなモチーフ理論の研究が進展すれば [KeS] の主結果のモチーフ論的な一般化を得ることが期待される．これは新たなモチーフ理論の暴分岐ガロア表現への応用と考えられる．また暴分岐ガロア表現が不確定特異点型 D-加群の数論的類似であることに鑑みれば，後者への応用も期待される．

参考文献

[BS] F. Binda and S. Saito, *Motivic complex with moduli and regulator maps*, preprint.

[KSY] B. Kahn, S. Saito and T. Yamazaki, *Reciprocity sheaves, I*, http://arxiv.org/abs/1402.4201.

[KeS] M. Kerz and S. Saito, *Chow group of 0-cycles with modulus and higher dimensional class field theory*, arxiv.org/abs/1304.4400.