III. 局所体上の Chow 群のリジッド解析幾何による研究

項目 (II) で述べたモチフィックコホモロジーの有限性予想の特別な場合として次の予想が重要である．

予想 1：(Bloch-Beilinson) X を代数体上の滑らかな射影的多様体とする．X 上の次元 r の代数的サイクルの有理同値類のなす Chow 群 $\mathrm{CH}_r(X)$ は有限生成アーベル群である．

この予想は，$r = \dim(X) - 1$ の場合は Mordell-Weil の定理から従う．それ以外に知られている結果はごく僅かである．この問題に迫るために，まず X が局所体上の多様体の場合に $\mathrm{CH}_r(X)$ の構造を調べることは自然な発想である．この場合一般には $\mathrm{CH}_r(X)$ は有限生成でないことが知られている．その一方で次の予想 (弱 Mordell-Weil 定理の類似) が重要である．

予想 2：(Colliot-Thélène) X は局所体 k 上滑らかな射影的多様体とする．自然数 $n > 0$ にたいし $\mathrm{CH}_0(X)/n$ は有限である．また $\mathrm{CH}_0(X)$ のねじれ部分 は有限である．

これまでの研究で予想 2 の前半を条件付きで解決することに成功した．

定理 1：([SS]) n が k の剰余体の標数と互いに素なら $\mathrm{CH}_0(X)/n$ は有限である．

一方 [AS] において $\mathrm{CH}_0(X)$ のねじれ部分が無限である例が構成し，予想 2 の反例を与えた．ここでは局所体上の多様体の代数的サイクルの研究に 混合 Hodge 加群の理論が本質的に用いられた．

予想 1 への応用のためには，定理 1 において n が k の剰余体の標数と互いに素という仮定を除くことが重要である．現在これにむけた新しいアプローチを展開している．基本的な構想は，高次 Chow 群の理論をリジッド解析空間にまで拡張し解析的手法を用いて問題に迫ることである．これを簡単に説明するために高次 Chow 群の定義を思い出そう．まず位相空間 X の特異ホモロジー群

$$H_q(X, \mathbb{Z}) := H_q(s(X, \bullet))$$

を復習しておこう．ここで $s(X, \bullet)$ は特異チェイン複体と呼ばれるアーベル群の複体

$$\cdots \to s(X, q) \xrightarrow{\partial} s(X, q-1) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} s(X, 0)$$

で，その次数 q の項は

$$s(X, q) = \bigoplus_{\Gamma} \mathbb{Z}[\Gamma] \quad (\Gamma \text{ はすべての連続写像 } \Delta^q_{top} \to X \text{ をわたる})$$

で与えられる．ここで

$$\Delta^q_{top} = \Big\{(x_0, x_1, \cdots, x_q) \in \mathbb{R}^{q+1} \;\Big|\; \sum_{0 \leqq i \leqq q} x_i = 1,\ x_i \geqq 0\Big\}$$

は位相的特異単体で，境界写像 ∂ は Δ^q_{top} の面への制限写像の交代和である．

Bloch の高次チャウ群の定義は位相空間の特異ホモロジーの代数的類似を辿る．ここでは X は体 k 上分離的有限型なスキームとする[1]．位相的特異単体 Δ^q_{top} の代数的類

[1] Dedekind 環上有限型なスキームにたいしても定義されるが少々複雑になる．

似は

$$\Delta^q = \mathrm{Spec}\big(k[t_0, \cdots, t_q]/(\sum_{i=0}^{q} t_i - 1)\big)$$

で，$\Delta^s = \{t_{i_1} = \cdots = t_{i_{q-s}} = 0\} \subset \Delta^q$ がその面である．$s(X,q)$ の類似は $X \times \Delta^q$ 上の代数的サイクルの空間たち

$$z_r(X,q) = \bigoplus_{\Gamma \subset X \times \Delta^q} \mathbb{Z}[\Gamma]$$

である．ここで r は固定された自然数，Γ は $X \times \Delta^q$ 上の次元 $r+q$ の閉部分整スキームで，すべての面 $\Delta^s \subset \Delta^q$ と正しく交わるもの全体をわたる[2]．これから位相空間の特異チェイン複体の代数的類似である**サイクル複体**

$$z_r(X,\bullet) \ : \ \cdots \to z_r(X,q) \xrightarrow{\partial} z_r(X,q-1) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} z_r(X,0),$$

が生じる．Bloch の高次チャウ群は，サイクル複体のホモロジー群

$$\mathrm{CH}_r(X,q) := H_q\big(z_r(X,\bullet)\big)$$

として定義される．

さて基礎体 k が局所体であるとし，実数 $\rho \geq 1$ にたいし $B(0,\rho)$ を原点を中心とする半径ρの 1 次元閉球とする．k 上のリジッド解析空間 $\mathfrak{X}$ にたいし，**半径** ρ **のサイクル複体** $z_r(\mathfrak{X}/\rho,\bullet)$ が $\mathfrak{X} \times B(0,\rho)^n$ 上の解析的サイクルを用いて上と同様に定義される．$\mathfrak{X}$ **の半径** ρ **の高次** *Chow* **群** $\mathrm{CH}_r(\mathfrak{X}/\rho,n)$ がこの複体の n 次ホモロジー群と定義される．また $\mathrm{CH}_r(\mathfrak{X}/\rho) = \mathrm{CH}_r(\mathfrak{X}/\rho,0)$ とおく．

すでに基本的な関手性や moving lemma に加え次の結果が示されている: X を局所体 k 上滑らかな射影的多様体とし，$\mathfrak{X} = X^{an}$ を X に付随するリジッド解析空間とする．$Z_0(X)^+$ を X 上の有効ゼロサイクル (閉点の非負整数を係数とする有限和) 全体のモノイドとする．このとき次が成り立つ．以下，p は k の剰余体の標数を表す．

- $Z_0(X)^+$ 上の擬距離 $d(\ ,\ )$ が定義され，

  $$F^\rho \mathrm{CH}_0(X) := \{[\alpha]-[\beta] \mid \alpha,\beta \in Z_0(X)^+,\ d(\alpha,\beta) \leq \rho^{-1}\}$$

  とおく ($[\alpha]$ は $\alpha \in Z_0(X)^+$ の $\mathrm{CH}_0(X)$ での類)．このとき次の同型が成り立つ．

  $$\mathrm{CH}_0(X^{an}/\rho) \xrightarrow{\cong} \mathrm{CH}_0(X)/F^\rho \mathrm{CH}_0(X).$$

- 自然数 $n > 0$ にたいし ρ を十分大きくとれば $F^\rho \mathrm{CH}_0(X) \subset p^n \mathrm{CH}_0(X)$ が成り立つ．特に $\mathrm{CH}_0(X^{an}/\rho)$ が有限なら $\mathrm{CH}_0(X)/p^n$ は有限である．

以上により，$\mathrm{CH}_0(X)/p^n$ の有限性は $\mathrm{CH}_0(X^{an}/\rho)$ の有限性に帰着されたわけである．これを示すための基本方針は以下のとおりである． 以下，$d = \dim(X)$ とする．

[2]位相空間の特異ホモロジーの類似として，スキームの射 $f : \Delta^q \to X$ のグラフを考えれば $X \times \Delta^q$ 上の代数的サイクルと見れるが，これらだけからは正しいものを生み出すことはできない．スキームの射のグラフだけでは十分でないのである．

Step1： 同型

$$\mathrm{CH}_0(X^{an}/\rho) \xrightarrow{\cong} H^{2d}(X^{an}, \mathbb{Z}(d)_{X^{an}/\rho})$$

を示す．ここで $\mathbb{Z}(d)_{X^{an}/\rho}$ はリジッド・モチフィック複体とよばれる X^{an} 上の許容位相に関する層の複体で，X^{an} のサイクル複体 $z_0(X^{an}/\rho, \bullet)$ を用いて定義される．この同型は，Bloch の高次 Chow 群にたいする Zariski 降下と呼ばれる性質のリジッド解析的類似である．

Step2： 同型

$$H^{2d}(X^{an}, \mathbb{Z}(d)_{X^{an}/\rho}) \xrightarrow{\cong} H^d(X^{an}, \mathcal{K}^M_{d,X^{an}/\rho})$$

を示す．ここで $\mathcal{K}^M_{d,X^{an}/\rho}$ はミルナー K 群の層のリジッド解析版である (詳しい説明は省略)．すでに右辺のコホモロジー群の有限性がすでに示されている (この点がリジッド幾何を使う利点で，この代数的類似を示すのは非常に困難である)．この主張は $\mathbb{Z}(d)_{X^{an}/\rho}$ のコホモロジー層にたいする次の主張から従う．

$$\mathcal{H}^n(\mathbb{Z}(d)_{X^{an}/\rho}) \cong \begin{cases} \mathcal{K}^M_{d,X^{an}/\rho} & \text{for } n = d \\ 0 & \text{for } n > d \end{cases}$$

Bloch のサイクル複体にたいしこれに対応する主張は示されている．

参考文献

[AS] M. Asakura and S. Saito, *Surfaces over a p-adic field with infinite torsion in the Chow group of 0-cycles*, Algebra and Number Theory **1** (2008), 163–181.

[SS] S. Saito and K. Sato, *A finite theorem for zero-cycles over p-adic fields*, Annals of Mathematics **172** (2010), 593–639.