II. 高次元ハッセ原理とモチフィックコホモロジーの有限性

Hasse 原理とは，有理数体上の 2 次形式に対する局所大域原理 (Hasse-Minkowski の定理) が源で，これを一般化した大域体上の中心的単純環 (あるいはブラウアー群) にたいする局所大域原理は古典的類体論で重要な役割を果たす．1985 年に加藤和也はこれを高次元化する予想を提出した．数論的スキーム[1] X と自然数 a, n にたいし加藤ホモロジー $KH_a(X, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ (次数 a，係数 $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$) が定義される (詳しい定義は [Sa, §8] を参照されたい)．加藤ホモロジーは数論的スキームの数論幾何的性質を反映する重要な不変量である．大域体上の中心的単純環にたいするの Hasse 原理は,「$X = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ ($\mathcal{O}_K$ は有限次代数体 K の整数環) あるいは有限体上固有的で滑らかな曲線 X にたいして $KH_1(X, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = 0$ である」という主張に同値である．加藤和也氏はこの事実を高次元化する次の予想を提出し，これを $\dim(X) = 2$ の場合に示した ([Ka]).

予想 1：X を有限体上固有的で滑らかな多様体，あるいは整数環上固有的で正則なスキームとすると，全ての自然数 $a, n > 0$ にたいし $KH_a(X, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = 0$ である．

これまでの研究で有限体上の多様体にたいする加藤予想の標数と素な部分を解決することに成功した:

定理 1：([JS1]，[KeS1]) X を有限体 k 上の滑らかで固有的な多様体とする．n が k の標数と互いに素なら全ての $a > 0$ にたいし $KH_a(X, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = 0$ である．

以下，加藤予想についての他の進展を紹介する．最近，Thuillier が Berkovich 空間を用いて有限体上の多様体にたいする加藤予想の標数部分の証明を発表した (論文は未発表)．これにより定理 1 において「n が k の標数と互いに素」という付加的な条件が取り除かれることになる．今後はこれらの結果を用いて 整数環上のスキームにたいする加藤予想を解決することを考えている．まず Jannsen[J] の結果により問題は局所体の整数環上のスキームの場合に帰着される．有限体上の場合の証明の鍵となったのは Bertini の定理と Affine Lefschetz 定理 (体上の affine 多様体のコホモロジーの消滅定理) である．これらを局所体の整数環上のスキームに拡張し，有限体上の場合の議論を踏襲して問題を解決する．局所体の整数環上の Bertini の定理については [JS2] で応用上十分な成果が挙がっている．局所体の整数環上のスキーム X にたいする Affine Lefschetz 定理については，X の p-進消滅サイクル層の詳しい計算が必要となる．X が整数環上の半安定還元を持つ場合にはこの計算は兵頭治氏により行われており，これを用いて必要な Affine Lefschetz 定理が示される．しかし我々の目標にとっては，X が半安定還元を持たない場合にも Affine Lefschetz 定理が必要となるので兵頭氏の結果を一般化する必要がある．これについては [KSS] において研究が進められている．

高次元ハッセ原理の応用

定理 1 は様々な応用を持つ：

- モチフィックコホモロジーの有限性,
- 有限体上の多様体のゼータ関数の特殊値問題への応用,
- 高次元類体論のモチフィックコホモロジーによる高次化,

[1] 整数環または有限体上有限型スキーム

- 特異点論とくに McKay 原理 (McKay 対応の背後にある原理) への応用 ([KeS2]).

これらは [Sa] で解説されているので興味の或る方は参照されたい．以下，モチフィックコホモロジーへの応用について簡単に解説する．

モチフィックコホモロジー とは，代数多様体あるいはデデキント環上有限型なスキームにたいし定義される重要な不変量である．これは代数体の整数環のイデアル類群や単数群，代数多様体の Chow 群などを一般化した重要な研究対象である．1970 年代に Grothendieck が，さまざまなコホモロジー理論の背後に存在する普遍的コホモロジー理論としてその存在を予見していた．1980 年代に S.Bloch は，代数多様体 X の Chow 群 $\mathrm{CH}^r(X)$ を一般化する**高次 *Chow* 群** $\mathrm{CH}^r(X,q)$ を定義し[2]，

$$H^i_M(X,\mathbf{Z}(r)) = \mathrm{CH}^r(X,2r-i)$$

とすれば，正則な X にたいしてはこれがモチフィックコホモロジーに期待される性質をもつことを示した．たとえば $X=\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ ($\mathcal{O}_K$ は有限次代数体 K の整数環) にたいしては $H^1_M(X,\mathbf{Z}(1))$ は K の単数群，$H^2_M(X,\mathbf{Z}(1))$ は K のイデアル類群に同型である．

私が研究の対象とするのは次の予想である．

予想 2： 正則な数論的スキーム X にたいし $H^i_M(X,\mathbf{Z}(r))$ は有限生成アーベル群である．

予想 2 は，代数体のイデアル類群が有限であること (Minkowski の定理)，代数体の整数環の単数群が有限生成であること (Dirichlet の定理)，代数体上のアーベル多様体の有理点のなす群が有限生成であること (Mordell-Weil の定理) の一般化である．モチフィックコホモロジーについて国際的に活発な研究が行われてきた理由のひとつは，数論的スキームのゼータ関数の特殊値の予想 (Tate 予想，Beilinson 予想，Bloch-加藤予想) で中心的役割を果たすことにある．予想 2 はゼータ関数の特殊値予想の大きな部分を占める重要な未解決問題で，Mordell-Weil の定理と 1 次元の場合 (代数体の整数環あるいは有限体上の曲線の場合) の Quillen による結果を除いては殆ど結果は知られていなかった．定理 1 から有限体上滑らかな多様体のモチフィックコホモロジーの有限性の新たな結果が導かれる．

定理 2： X を有限体上 k 上の滑らかな多様体とする．r,n を自然数とし次を仮定する：

- $r \geq \dim(X)$,
- n が k の標数と素.

このときすべての $i \in \mathbf{Z}$ にたいし $H^i_M(X,\mathbf{Z}(r))/n$ と $H^i_M(X,\mathbf{Z}(r))[n]$ はともに有限である[3]．また $\dim(X) \leq 4$ なら n が k の標数と素という仮定は不要である．

現在進めている整数環上のスキームにたいする加藤予想の証明が成功すれば，X がが整数環上有限型な正則なスキームにたいしても上と同様なモチフィックコホモロジーの有限性定理が得られる．[KeIS] では，Voevodsky のモチーフの理論を用いて定理 2 を拡張し，有限体上の (固有的とも滑らかとも限らない) スキームのモチフィックホモロジー (高次 Chow 群の一般化) の有限性定理が示されている．

[2] $\mathrm{CH}^r(X,0)=\mathrm{CH}^r(X)$ である

[3] アーベル群 M にたいし M/n と $M[n]$ は M 上の n 倍写像の余核と核を表す

参考文献

[J] U. Jannsen, *Hasse principles for higher dimensional fields*, http://arxiv.org/abs/0910.2803.

[JS1] U. Jannsen and S. Saito, Kato conjecture and motivic cohomology over finite fields, http://arxiv.org/abs/0910.2815.

[JS2] U. Jannsen and S. Saito, *Bertini theorems and Lefschetz pencils over discrete valuation rings, with applications to higher class fileld theory*, J. of Algebraic Geometry **21** (2012), 683–705.

[Ka] K. Kato, *A Hasse principle for two dimensional global fields*, J. für die reine und angew. Math. **366** (1986), 142–183.

[KeS1] M. Kerz and S. Saito, *Cohomological Hasse principle and motivic cohomology of arithmetic schemes*, Publ. Math. IHES **115** (2012), 123–183.

[KeS2] M. Kerz and S. Saito, *Cohomological Hasse principle and resolution of quotient singularities*, New York J. Math. **19** (2013), 597–645.

[KelS] Kelly and S. Saito, *Weight homology of motives and motivic homology*, preprint.

[KSS] K. Kato, S. Saito and K. Sato, *P-adic vanishing cycles and p-adic 'etale Tate twists on generalized semistable families*, preprint.

[Sa] 斎藤秀司，高次元類体論の現在-非アーベル化への展望と高次元 *Hasse* 原理 , 日本数学会「数学」 **88** (2014).