I. 高次元類体論

類体論はフェルマーとガウスの偉業を源とし 20 世紀前半に高木貞治と E. Artin により完成された整数論の礎で，大域体 (有限次代数体あるいは有限体上の一変数関数体) の最大アーベル拡大のガロア群を，その体に内在的な情報 (例えばイデアル類群) のみを用いて統制する理論である．類体論の高次元化とはこの理論を，有限生成体 (素体上高い超越次数を持つ関数体) へ拡張する理論である．これはスキーム論を用いて数論幾何学的問題として定式化される．整数環または有限体上有限型スキームを 数論的スキームと言う．これは有限生成体の幾何学化である．基本的問題は，数論的スキーム U のアーベル基本群 $\pi_1^{ab}(U)$ を U に内在的な幾何学的情報を用いて記述することである (スキームのアーベル基本群とは Grothendieck による代数的基本群のアーベル化である)．1980 年代の加藤和也氏との共同研究において，代数的 K 理論を用いて上の問題へ 1 つの解答を与えることができた．最近の研究 [KeS] において，加藤-斎藤の高次元類体論を本質的に改良する新たな進展をもたらした．代数的 K 理論のかわりにモデュラス付き Chow 群を用いて $\pi_1^{ab}(U)$ を記述し，その帰結として Drinfeld-Deligne が提出した有限体上の多様体上の ℓ-進層の存在予想の部分的 (層の階数が 1 の場合) 解決を与えた．Drinfeld-Deligne の予想は 高次元類体論の非アーベル化 を与えるものである．現在，Abbes-斎藤毅の高次元分岐理論を用いて [KeS] の手法を拡張し，Drinfeld-Deligne の予想を解決する研究を進めている．以下これらについてもう少し詳しく解説する．さらに詳しい解説が [Sa] にあるので興味のある方はこちらも参照されたい．

まず Drinfeld-Deligne による有限体上の滑らかな多様体 U 上の ℓ-進層の存在予想を説明する．U 上の滑らかな ℓ-進層 $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ にたいしその semi-simplification が等しいとき同値であるとする．自然数 r にたいし階数 r の U 上の滑らかな ℓ-進層の同値類の集合を $\mathcal{S}_r(U)$ であらわす．U 上滑らかな ℓ-進層は U の代数的基本群の ℓ-進表現に同値であり，$\mathcal{S}_r(U)$ の理解は U の代数的基本群の理解につながる重要な問題である． U が 1 次元 (つまり曲線) の場合には，Lafforgue が完成した Langlands プログラム対応により $\mathcal{S}_r(U)$ は $\mathrm{GL}_r(\mathbf{A}_K)$ ($\mathbf{A}_K$ は U の関数体 K のアデール環) の保型表現により理解される．そこで $\mathcal{S}_r(U)$ の理解を 1 次元の場合に帰着できればその効用は大きい．このために骸骨層 (skeleton sheaf) を導入する．U 上の曲線の正規化全体の集合を $Cu(U)$ で表す．U 上の曲線上の ℓ-進層の系:

$$\mathcal{V} = (V_C)_{C \in Cu(U)} \quad (V_C \in \mathcal{S}_r(C))$$

で自然な整合条件 (閉点のフロベニウス作用の固有多項式たちが等しいという条件) を満たすものを U 上の骸骨層と呼び，その全体を $\mathcal{S}k_r(U)$ で表す．U 上の ℓ-進層を U 上の曲線の正規化に制限することで写像

$$\tau(U) : \mathcal{S}_r(U) \to \mathcal{S}k_r(U)$$

が生ずる．チェボタレフの密度定理により $\tau(U)$ がは単射であることがわかる．よって $\tau(U)$ の像を記述すること，つまり U 上の骸骨層がいつ U 上の ℓ-進層に貼り合うかを知ることが問題である．このために U のコンパクト化 $j : U \hookrightarrow X$ (X は固有的正規な多様体，j は開埋め込み) を固定する．U と交わらない X 上の有効カルティエ因子 D にたいし 「U 上の骸骨層 $\mathcal{V}$ の分岐が D 以下である」 という性質が分岐理論を用いて定義される．そのような骸骨層全体を $\mathcal{S}k_r(X, D)$ で表す．

予想：(Deligne) $\mathrm{Image}(\tau(U)) = \bigcup_{D\subset X} \mathcal{S}k_r(X,D) \subset \mathcal{S}k_r(U)$.

ここで和は U と交わらない X 上の有効カルティエ因子 D 全体をわたる．

Drinfeld は D が被約のとき $\mathcal{S}k_r(X,D) \subset \mathrm{Image}(\tau(U))$ を示した．[KeS] において次が示された．

定理 1：基礎体の標数が 2 でないとき， Deligne 予想は $r=1$ の場合に正しい．

定理 1 は，モデュラス付き Chow 群を用いて $\pi_1^{ab}(U)$ を記述する高次元類体論 (定理 2) から導かれる．X の 0 次元 Chow 群 $\mathrm{CH}_0(X)$ とは，X 上のゼロサイクル (X の閉点の整数係数の有限和) 全体の群を有理同値関係で割った群である．[KeS] において $\mathrm{CH}_0(X)$ を一般化する D **をモヂュラスとする** 0 **次元** *Chow* **群** $\mathrm{CH}_0(X,D)$ が，ゼロサイクルの群をモヂュラス付きの有理同値関係で割った群として定義された．これを用いて U の高次元イデール類群

$$C(U) = \varprojlim_D \mathrm{CH}_0(X,D)$$

が定義される．ここで逆極限は U と交わらない X 上の有効カルティエ因子 D 全体をわたる．さらに高次元相互写像

$$\rho(U) : C(U) \to \pi_1^{ab}(U)$$

が定義される．$\dim(U)=1$ のとき $\rho(U)$ は古典的類体論における Artin の相互写像に一致する．よって次の定理は古典的類体論の高次元化である．

定理 2：([KeS]) 基礎体 k の標数が 2 でないとき，$\rho(U)$ は副有限群の同型

$$C(U)^0 \xrightarrow{\cong} \pi_1^{ab}(U)^0$$

を誘導する．ここで $C(U)^0$ は次数 0 のゼロサイクルのなす $\mathrm{CH}_0(X,D)$ の部分群の逆極限で，$\pi_1^{ab}(U)^0$ は射 $U \to \mathrm{Spec}(k)$ が誘導する写像 $\pi_1^{ab}(U) \to \pi_1^{ab}(\mathrm{Spec}(k))$ の核である．

定理 3 の証明では加藤和也と松田茂樹による高次元分岐理論 (非完全な剰余体をもつ完備離散付置体のアーベル拡大の分岐理論) が本質的な役割を果たす．加藤-松田はそのようなアーベル拡大の暴分岐を統制する Artin 導手の理論を構成した．定理 3 の証明の要は，これを代数的サイクルを用いて精密化する**サイクル論的** *Artin* **導手**を構成することである．A.Abbes と斎藤毅は加藤-松田の理論の非アーベル化を構築した．これを用いて定理 3 の証明の手法を改良し，サイクル論的 Artin 導手の非アーベル化を構成することにより Deligne 予想を解決するプログラムの構築を現在進めている．

これとは別に項目の (IV) で解説するモチーフの理論の一般化の枠組みにおいて定理 2 の拡張を与えることも考えている．これについては (IV) を参照されたい．

参考文献

[KeS] M. Kerz and S. Saito, *Chow group of 0-cycles with modulus and higher dimensional class field theory*, arxiv.org/abs/1304.4400.

[Sa] 斎藤秀司，高次元類体論の現在-非アーベル化への展望と高次元 *Hasse* 原理 , 日本数学会「数学」 **88** (2014).