代数学 II 演習 1

以下、環は単位元をもち、環の準同型は単位元を単位元に移すものとする。

[1] M を加群として、

$$\mathrm{End}(M) = \{f : M \to M \mid f \text{ は加群の準同型}\}$$

とおく。

(1) $f, g \in \mathrm{End}(M)$ にたいし、写像 $f + g,\ f \cdot g\ :\ M \to M$ を

$$(f+g)(m) = f(m) + g(m), \quad (f \cdot g)(m) = f(g(m)) \quad (m \in M)$$

で定義する。このとき、$f + g,\ f \cdot g \in \mathrm{End}(M)$ を示せ。この定義により、$\mathrm{End}(M)$ が環になることを示せ。

(2) R を環として、M に左 R-加群の構造

$$R \times M \to M\ ;\ (r, m) \to r \cdot m$$

が与えられているとする。$r \in R$ にたいし、写像 $r_M\ :\ M \to M$ を

$$r_M(m) = r \cdot m \quad (m \in M)$$

で定義すると、$r_M \in \mathrm{End}(M)$ であることを示せ。さらに

$$R \to \mathrm{End}(M)\ ;\ r \to r_M$$

は環の準同型であることを示せ。

(3) 逆に、加群 M と環 R にたいし環準同型 $\phi\ :\ R \to \mathrm{End}(M)$ が与えられているとするとき、

$$R \times M \to M\ ;\ (r, m) \to \phi(r)(m)$$

により M に左 R-加群の構造が定まることを示せ。

[2] $K[X]$ を体 K 上の多項式環とする。$A \in M_n(K)$ にたいし写像

$$K[X] \times K^n \to K^n\ ;\ (f(X), \alpha) \to f(A) \cdot \alpha$$

を考える。ただし $f(A) \in M_n(K)$ は $f(X)$ に A を代入したものである。

(1) 上の対応により K^n は $K[X]$-加群となることを示せ。

(2) $B \in M_n(K)$ にたいし、写像 $\phi_B\ :\ K^n \to K^n\ ;\ \alpha \to B \cdot \alpha$ を考える。$\phi_B \in \mathrm{Hom}_{K[X]}(K^n, K^n)$ であるための必要十分条件は何か？

代数学II演習2

[1] R を環、$M,\ N$ を R-加群とする。

$$\mathrm{Hom}_R(M,N)=\{f:M\to N\mid f \text{ は } R\text{-加群の準同型}\}$$

とおく。

(1) $f,g\in\mathrm{Hom}_R(M,N)$ にたいし、写像 $f+g,\ f\cdot g\ :\ M\to N$ を

$$(f+g)(m)=f(m)+g(m)\quad(m\in M)$$

で定義する。このとき、$f+g\in\mathrm{Hom}_R(M,N)$ を示せ。またこれにより $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ が加群になることを示せ。

(2) R が可換環とする。$r\in R$ と $f\in\mathrm{Hom}_R(M,N)$ にたいし、写像にたいし $r\cdot f\ :\ M\to N$ を

$$(r\cdot f)(m)=r\cdot f(m)\quad(m\in M)$$

で定義する。このとき、$r\cdot f\in\mathrm{Hom}_R(M,N)$ を示せ。またこれにより $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ が R-加群になることを示せ。また、R が可換でないとき (2) が成り立たない例を作れ。

(3) R-加群 N と、R-加群の準同型 $M_1\xrightarrow{f}M_2$ にたいし次が加群の準同型であることを示せ。

$$f_*:\mathrm{Hom}(N,M_1)\to\mathrm{Hom}(N,M_2)\ ;\ \phi\to f\cdot\phi\quad(\phi\in\mathrm{Hom}(N,M_1)),$$

$$f^*:\mathrm{Hom}(M_2,N)\to\mathrm{Hom}(M_1,N)\ ;\ \psi\to\psi\cdot f\quad(\psi\in\mathrm{Hom}(M_2,N)).$$

[2] R を環、$0\to M_1\xrightarrow{f}M_2\xrightarrow{g}M_3\to 0$ を R-加群の完全系列とする。

(1) R-加群 N にたいし次が完全系列であることを示せ。

$$0\to\mathrm{Hom}_R(N,M_1)\xrightarrow{f_*}\mathrm{Hom}_R(N,M_2)\xrightarrow{g_*}\mathrm{Hom}_R(N,M_3),$$

$$0\to\mathrm{Hom}_R(M_3,N)\xrightarrow{g^*}\mathrm{Hom}_R(M_2,N)\xrightarrow{f^*}\mathrm{Hom}_R(M_1,N).$$

(2) 上の g_* と f^* が全射でない例を与えよ。

[3] R を環、$f:M\to N$ を R-加群の準同型とする。次が完全系列であることを示せ。

$$0\to\mathrm{Ker}(f)\to M\to N\to\mathrm{Coker}(f)\to 0.$$

$$0\to\mathrm{Ker}(f)\to M\to\mathrm{Im}(f)\to 0.$$

$$0\to\mathrm{Im}(f)\to N\to\mathrm{Coker}(f)\to 0.$$

代数学 II 演習 3

[1] R を環、M を R-加群、$M_1,\ M_2 \subset M$ を部分 R-加群とする。

$$\phi\ :\ M_1 \oplus M_2 \to M\ ;\ (m_1, m_2) \to m_1 + m_2$$

と定義する。次を示せ。

(1) ϕ は R-準同型,

(2) $\mathrm{Im}(\phi) = M_1 + M_2$ ($\overset{\mathrm{def}}{=} M_1$ と M_2 で生成される部分 R-加群),

(3) $\mathrm{Ker}(\phi) = M_1 \cap M_2$.

[2] R を環、M, M_1, M_2 を R-加群とするとき、次の加群としての同型を具体的に構成せよ。また、R が可換環ならこれらは R-加群としての同型であることも示せ。

(1) $\mathrm{Hom}_R(M_1 \oplus M_2, M) \simeq \mathrm{Hom}_R(M_1, M) \oplus \mathrm{Hom}_R(M_2, M)$.

(2) $\mathrm{Hom}_R(M, M_1 \oplus M_2) \simeq \mathrm{Hom}_R(M, M_1) \oplus \mathrm{Hom}_R(M, M_2)$.

(3) $\mathrm{Hom}_R(R^n, M) \simeq M^n$.

[3] R を可換環、$I \subset R$ をイデアル、M を R-加群とする.

$$M[I] = \{m \in M \mid rm = 0 \text{ for } \forall r \in I\}$$

とおく。$M[I]$ は部分 R-加群であることを示せ。また次の R-加群の同型を示せ。

$$\mathrm{Hom}_R(R/I, M) \simeq M[I].$$

[4] m, n を自然数、d をその最大公約数とする。次の加群の同型を示せ。

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}.$$

[5] 可換環 R にたいし自由 R-加群 R を考える。

(1) R が PID なら任意の部分 R-加群 $M \subset R$ は自由であることを示せ。

(2) R を以下の環とするとき、R の部分加群 M で自由ではないものの例を挙げよ。

(i) $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, (ii) $R = K[X, Y]$ (体 K 上の 2 変数多項式環).

代数学 II 演習 4

以下、R は環とする。N を R-加群とする。部分 R-加群 $M \subset N$ が直和因子であるとは、部分 R-加群 L が存在して同型 $N \simeq M \oplus L$ が成り立つことである。

[1] $f : M \to N$ を R-加群の単射準同型とする。次は同値を示せ。

(1) R-加群の準同型 $g : N \to M$ で $g \circ f = id_M$ なるものが存在する。

(2) $\mathrm{Im}(f) \subset N$ は直和因子である。

[2] n, a, b は整数とする。次を示せ。

(1) $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ が直和因子であるための必要十分条件は $n \in \{\pm 1, 0\}$.

(2) $x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2$ で生成される部分加群 $M \subset \mathbb{Z}^2$ が直和因子であるための必要十分条件は $GCD(a, b) = \pm 1$ または $a = b = 0$. .

[3] $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2$ で生成される部分加群 $M \subset \mathbb{Z}^2$ にたいし、準同型

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2, \quad g : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$$

で $\mathrm{Im}(f) = M$, $g \circ f = id$ を満たすものを構成せよ。これを使って、部分加群 $N \subset \mathbb{Z}^2$ で $\mathbb{Z}^2 = M \oplus N$ となるものを構成せよ。

[4] R-加群の完全系列 $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$ にたいし、次が同値であることを示せ。

(1) R-加群の同型 $\phi : M_2 \xrightarrow{\simeq} M_1 \oplus M_2$ が存在して次が可換図式となる。

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to & M_1 & \xrightarrow{i} & M_1 \oplus M_3 & \xrightarrow{p} & M_3 & \to 0 \\
 & \| & & \uparrow \phi & & \| & \\
0 \to & M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 & \xrightarrow{g} & M_3 & \to 0
\end{array}$$

(2) R-加群の準同型 $s : M_3 \to M_2$ が存在して、$g \cdot s = id_{M_3}$ となる。

(3) R-加群の準同型 $r : M_2 \to M_1$ が存在して、$r \cdot f = id_{M_1}$ となる。

(4) 部分 R-加群 $N \subset M_2$ が存在して、g の N への制限が同型 $N \xrightarrow{\simeq} M_3$ を誘導する。

[5] [4] の条件が成立しない例を与えよ。また、M_3 が自由 R-加群なら [4] の条件は常に成立することを示せ。

代数学 II 演習 5

可換環 R と行列 $A \in M_{m,n}(R)$ にたいし、次の加群の準同型を考える。

$$\phi_A \ : \ R^n \to R^m \ ; \ \alpha \to A \cdot \alpha.$$

[1] R が PID とし、$m = n$ とする。次を示せ。

(1) ϕ_A が単射 $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

(2) ϕ_A が全射 $\Leftrightarrow \phi_A$ が同型 $\Leftrightarrow \det(A) \in R^\times$.

[2] 上で $R = \mathbb{Z}$ とする。以下の行列にたいし、$\mathrm{Ker}(\phi_A)$, $\mathrm{Im}(\phi_A)$ の生成元を求めよ。また以下の形の同型を与えよ。

$$\mathrm{Coker}(\phi_A) \simeq \mathbb{Z}^s \oplus \mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/a_r\mathbb{Z} \quad (a_1 | \cdots | a_r)$$

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, (2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, (2) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 4 \\ 6 & 6 & 13 & 5 \end{pmatrix}$

[3] 環 R と自然数 n にたいし自由 R-加群 R^n を考える。R が PID なら任意の部分 R-加群 $M \subset R^n$ は自由であることを示せ。R が PID でない場合の同様の主張の反例をあげよ。

[4] (1) 位数 8 をもつアーベル群を同型を除いてすべて書き下せ。
(2) 位数 72 をもつアーベル群は同型を除いていくつあるか？

[5] 単因子論を用いて以下の行列 A のジョルダン標準形を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 13 & -7 \\ -5 & 19 & -10 \end{pmatrix}$, (2) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

[6] 次の環の乗法群と $\mathbb{Z}^s \oplus \mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/a_r\mathbb{Z}$ $(a_1 | \cdots | a_r)$ の形の群との同型を与えよ。

(1) $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$, (2) $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$,

(3) $\mathbb{Z}[X][\frac{1}{X(X-1)}]$, (4) $\mathbb{Z}[X]/(X + X^3)$.

[7] $R = K[X, Y]$ を体 K 上の 2 変数多項式環，$M = R^2$, $N \subset M$ を $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in R^2$ で生成される部分加群，$Q = M/N$ とする。このとき $Q_{tor} = 0$ だが R-加群の同型 $Q \simeq R$ は存在しない（特に R 上では単因子論は成立しない）ことを示せ。

代数学 II 演習 6

一般に R-加群 M が直既約とは、R-加群の同型 $M \simeq M_1 \oplus M_2$ があったとき、$M_1 = 0$ または $M_2 = 0$ が成り立つことである。

[1] R-加群 M がアルチン加群のとき、M は直既約な部分 R-加群の直和に分解することを示せ。（ヒント：M の 0 でない直和因子全体の集合を考えると、その極小元は直既約であることに注意）

[2](難) M を R-加群とする。M が直既約でないことと、$e \in \mathrm{End}_R(M)$ が存在して $e^2 = e$ かつ $e \neq 0,\ id_M$ が成り立つことが同値であることを示せ。

[2] M が長さ有限の R-加群とする。

(1) M が直既約なら $\mathrm{End}_R(M)$ の非可逆元はべき零であることを示せ。

(2) M が直既約なら $\mathrm{End}_R(M)$ の非可逆元全体は両側イデアルであることを示せ。

(3) R が可換とする。M が直既約であることと $\mathrm{End}_R(M)$ が局所環であることは同値であることを示せ。

[3] R が PID とする。

(1) $M = R$ は R-加群として直既約であることを示せ。

(2) $a \in R - \{0\}$ にたいし、$R/(a)$ が R-加群として直既約であるための必要十分条件は $a = u\pi^n$ (u は R の単元、π は R の素元、n は自然数) とかけることであることを示せ。

(3) $a \in R - \{0\}$ にたいし、$R/(a)$ の直既約分解を求めよ。

[4] K を体とする。$A \in M_n(K)$ にたいし、演習 2[2] の方法で K^n を $K[X]$-加群とみたものを M とするとき、以下のそれぞれの場合に M を直既約な $K[X]$-加群の直和に分解せよ。

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, K は任意, (2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \mathbb{R},\ \mathbb{C}$,

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \mathbb{Q},\ \mathbb{C},\ \mathbb{F}_3$, (4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \mathbb{F}_2,\ \mathbb{F}_3,\ \mathbb{F}_5$.

代数学II演習7

[1] テンソル積を利用して次を示せ。L/K を体の拡大する。$A \in M_{m,n}(K[X])$ を自然に $M_{m,n}(L[X])$ の元とみなしたものを A_L とすると，A の単因子と A_L の単因子は一致する。

[2] m, n を自然数とする。

(1) 同型 $\mathbb{Z}[\frac{1}{m}] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\frac{1}{n}] \simeq \mathbb{Z}$ を示せ。

(2) 写像 $\phi : \mathbb{Z}[\frac{1}{m}] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\frac{1}{n}] \to \mathbb{Q}$ で、$\phi(x \otimes y) = xy$ を満たすものが存在することを示せ。

(3) $\mathrm{Im}(\phi)$ を決定せよ。

[3] 写像 $\psi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}\,;\ x \to x \otimes 1$ は同型であることを示せ。

[4] m, n を自然数、$d = GCD(m, n)$ とする。$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ を示せ。

[5] n を自然数とする。次を示せ。

(1) $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = 0,$

(2) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = 0,$

(3) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Q} = 0.$

代数学 II 演習 8

[1] $\iota : R \to S$ を可換環の準同型として、これにより S を R-加群とみなす。$R[X]$ を R-係数の多項式環としたとき、R-加群の同型 $\phi : S \otimes_R R[X] \simeq S[X]$ で

$$\phi\big(b \otimes (\sum_{i=1}^{d} a_i X^i)\big) = \sum_{i=1}^{d} (b\iota(a_i))X^i \quad (b \in S,\ a_i \in R)$$

を満たすものが存在することを示せ。

[2] [1] において、$S \otimes_R R[X]$ に講義 (R-代数のテンソル積) で説明した方法で可換な R-代数の構造を与えるとき、ϕ が環としての同型であることを確認せよ。また次の環の同型を示せ。

$$R[X] \otimes_R R[Y] \simeq R[X, Y].$$

[3] 可換環 R とそのイデアル I, J にたいし次の環の同型を示せ。

$$R/I \otimes_R R/J \simeq R/I + J.$$

[4] L/K を体の n 次分離拡大とする。

(1) F を K を含む分離閉体とするとき、環の同型 $L \otimes_K F \simeq F \times \cdots \times F$ (n 個の直積) を示せ。

(2) L/K がガロア拡大とするとき、環の同型 $L \otimes_K L \simeq L \times \cdots \times L$ (n 個の直積) を示せ。

[5] 次の事実を示せ (これは [4](2) において、L/K がガロア拡大でないと一般には結論が成り立たないことを示している)。
$K = \mathbb{Q},\ L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}),\ M = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)$ (ω は 1 の原始 3 乗根) とすると

$$L \otimes_K L \simeq L \times M.$$

代数学II演習9

以下、R を可換環とする。

[1] R-加群 M, N, L にたいし、R-加群の同型

$$\phi \ : \ \mathrm{Hom}_R(N \otimes L, M) \simeq \mathrm{Hom}_R(L, \mathrm{Hom}_R(N, M))$$

で、$u \in \mathrm{Hom}_R(N \otimes L, M)$ にたいし、

$$\big(\phi(u)(x)\big)(y) = u(y \otimes x) \quad (x \in L,\ y \in N)$$

を満たすものが存在することを示せ。

[2] $\iota : R \to A$ を可換環の準同型とする。R-加群 M と左 A-加群 N にたいし、加群としての同型

$$\phi \ : \ \mathrm{Hom}_R(M, N) \simeq \mathrm{Hom}_A(A \otimes_R M, N)$$

で、$u \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ にたいし、

$$\phi(u)(a \otimes x) = a \cdot u(x) \quad (a \in A,\ x \in M)$$

を満たすものが存在することを示せ。ただし左辺の $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ において N は係数の制限により R-加群とみている。

[3] $A,\ B,\ C$ を R-代数とする。

$$\mathrm{Hom}_R^{alg}(A, C) = \{ f \in \mathrm{Hom}_R(A, C) \mid \ f \text{ は } R\text{-加群の準同型かつ環準同型} \}$$

とする。$f \in \mathrm{Hom}_R^{alg}(A, C),\ g \in \mathrm{Hom}_R^{alg}(B, C)$ が

$$f(\alpha)g(\beta) = g(\beta)f(\alpha) \quad \text{for } \forall \alpha \in A,\ \forall \beta \in B$$

を満たすとする。このとき $h \in \mathrm{Hom}_R^{alg}(A \otimes_R B, C)$ で、

$$h(\alpha \otimes \beta) = f(\alpha)g(\beta) \quad \text{for } \forall \alpha \in A,\ \forall \beta \in B$$

を満たすものが一意に存在することを示せ。

[4] [3] で $A,\ B,\ C$ が可換環の場合に次の集合の双射を示せ。

$$\mathrm{Hom}_R^{alg}(A, C) \times \mathrm{Hom}_R^{alg}(B, C) \simeq \mathrm{Hom}_R^{alg}(A \otimes_R B, C).$$

[5] A を R-代数とするとき次の R-代数の同型を示せ。

$$M_n(R) \otimes_R A \simeq M_n(A).$$

代数学 II 演習 10

[1] R を PID とする。

(1) M を 0 でない単純 R-加群とすると、R の素元 π にたいし $M \simeq R/(\pi)$ であることを示せ。

以下、$a \in R - \{0\}$ を固定して、R-加群 $M = R/(a)$ を考える。

(2) $a = u \cdot \pi_1^{e_1} \cdots \pi_r^{e_r}$ (π_i は R の素元、u は R の単元) を a の素元分解とするとき M の直既約分解を与えよ。

(3) M の組成列を構成せよ。

[2] 可換環 R とそのイデアル $I \subset R$ にたいし、

$$\sqrt{I} = \{a \in R \mid \exists n \in \mathbb{N},\ a^n \in I\}$$

とおく。特に $\sqrt{(0)}$ をべき零根基という。

(1) $\sqrt{I}$ はイデアルであることを示せ。

(2) イデアル $I, J \subset R$ にたいし次が成り立つことを示せ。

$$\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}, \quad \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}.$$

(3) $\sqrt{(0)} \subset \mathrm{Jac}(R)$ を示せ。また、R がアルチン環なら等号が成り立つことを示せ。

[3] R を PID とし、$a \in R - \{0\}$ にたいし $S = R/(a)$ とおく。

(1) S はアルチン環であることを示せ。

(2) $a = u \cdot \pi_1^{e_1} \cdots \pi_r^{e_r}$ (π_i は R の素元、u は R の単元) を a の素元分解とするとき、S のヤコブソン根基 $\mathrm{Jac}(S)$ とべき零根基を求めよ。

(3) S が半単純であるための必要十分条件は $e_1 = \cdots = e_r = 1$ であることを示せ。

[4] K は体とする。

(1) 次の環 R のなかでアルチン環であるものはどれか？

(2) それぞれについて、ヤコブソン根基とべき零根基を求めよ。

(1) $K[X,Y]/(X^2, X^2Y^3, Y^5)$, (2) $K[X,Y]/(X^2, X^2Y^3)$,

(3) $K[X]$, (4) $K[X]$ のイデアル (X) での局所化.

代数学 II 演習 11

[1] 体 K 上の正方行列環 $R = M_n(K)$ を K^n に自然に作用させて R-加群とみたものを V とする。

(1) V は単純であることを示せ。

(2) $\mathfrak{a}_j \subset R$ を j 列の以外の成分が全て 0 である元からなる部分集合とする。$\mathfrak{a}_j$ は R の左イデアルで、R-加群の同型 $\mathfrak{a}_j \simeq V$ が成り立つことを示せ。

(3) M を単純 R-加群、$x \in M$ を 0 でない元とする。ある $1 \leq j \leq n$ が存在して写像 $\mathfrak{a}_j \to M$; $a \to a \cdot x$ が R-加群の同型であることを示せ。

(4) 各 $1 \leq \nu \leq n$ にたいし、

$$\bigoplus_{1 \leq j \neq \nu \leq n} \mathfrak{a}_j \subset R$$

は極大左イデアルであることを示せ。これより $\mathrm{Jac}(R) = 0$ を導け。

[2] G を位数が n の巡回群とする。体 K にたいし群環 $R = K[G]$ を考える。

(1) $K = \mathbb{C}$ の場合に R を単純環の積に分解せよ。

(2) $K = \mathbb{Q}$ かつ $n = 4$ の場合に R を単純環の積に分解せよ。

(3) K の標数が $p > 0$ かつ $n = p$ の場合に $\mathrm{Jac}(R)$ とべき零根基を求めよ。また左 R-加群としての R は直既約であることを示し、その組成列を求めよ。

[3] G を 3 次対称群として、$R = \mathbb{Q}[G]$ を考える。$V = \mathbb{Q}^3$ として、G の表現 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ を $\rho(\sigma)(e_i) = e_{\sigma(i)}$ (ただし e_1, e_2, e_3 は V の標準基底) で定義する。これにより V を R-加群とみなしたものを V_ρ とかく。

(1) $V_1 = \mathbb{Q} \cdot (e_1 + e_2 + e_3) \subset V_\rho$ は部分 R-加群であることを示せ。

(2) V_ρ を単純の R-加群の直和に分解せよ。

(3) (2) を用いて環の全射な準同型 $\phi : R \to \mathbb{Q} \times M_2(\mathbb{Q})$ を構成せよ。

(4) $\alpha = \dfrac{1}{6}\big((1) + (1,2,3) + (1,3,2) - (1,2) - (2,3) - (3,1)\big) \in R$ とすれば、$\mathrm{Ker}(\phi) = \mathbb{Q} \cdot \alpha$ かつ $\alpha^2 = \alpha$ が成り立つことを示せ。

(5) (3), (4) を用いて環の同型 $R \simeq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times M_2(\mathbb{Q})$ を構成せよ。

(6) 左 R-加群 R を単純の R-加群の直和に分解せよ。

代数学II演習12

Hamilton の4元数環 $\mathbb{H} = \mathbb{R}\cdot 1 \oplus \mathbb{R}\cdot i \oplus \mathbb{R}\cdot j \oplus \mathbb{R}\cdot k$ について次の答えよ。

[1]

(1) $\mathbb{R}$-線形写像 $f : \mathbb{H} \to M_2(\mathbb{C})$ を

$$f(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(j) = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}, \quad f(k) = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

で定めるとこれは環の準同型であることを示せ。

(2) 環の同型 $\phi : \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq M_2(\mathbb{C})$ で

$$\phi(\alpha \otimes y) = f(\alpha)\cdot \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \quad (\alpha \in \mathbb{H},\ y \in \mathbb{C})$$

を満たすものが存在することを示せ。

[2]

(1) 写像

$$\iota\ :\ \mathbb{H} \to \mathbb{H}^o\ ;\ x + yi + zj + wk \to x - yi - zj - wk \quad (x, y, z, w \in \mathbb{R})$$

は環の同型であることを示せ。ただし、$\mathbb{H}^o$ は $\mathbb{H}$ の逆環である。

(2) 写像 $\phi\ :\ \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \to \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H})$ を

$$\phi(\alpha \otimes \beta)(\gamma) = \alpha\gamma\iota(\beta) \quad (x, y, z \in \mathbb{H})$$

は環の同型を与えること示せ。ただし $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H})$ は $\mathbb{H}$ の自己 $\mathbb{R}$-線形写像全体のなす線形空間で、写像の合成を乗法として環と見ている。

代数学 II 演習 13

[1] 次の R-加群の射影的分解を求めよ。

(1) $R=\mathbb{Z},\ M=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ($n\geq 1$ は自然数),

(2) $R=K[X,Y],\ M=K[X,Y]/(X,Y)$ (K は体).

[2] $\mathbb{Z}$-加群 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ の入射的分解を求めよ。

[3] $n,r\geq 1$ を自然数で、$r|n$ であるとする。$R=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ とおく。

(1) R-加群の完全系列

$$(*)\qquad 0\to Rs\to R\to Rr\to 0$$

を構成せよ。ここで $s=n/r$ である。

(2) 次の条件は同値であることを示せ。

(i) $(*)$ は分解する (つまり演習 4[4] の条件を満たす)。

(ii) R-加群 Rr は射影的である。

(iii) $(r,s)=1$.

(3) 射影的 R-加群であって自由 R-加群でない例を構成せよ。

[4] $R=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ($n\geq 1$ は自然数) にたいし次の条件は同値であることを示せ。

(i) R は半単純。

(ii) 全ての左イデアル $I\subset R$ は射影的。

(iii) n は平方因子を持たない (つまり相異なる素数の積)。

[5] R を整域とし、M を R-加群とする。

(1) M が入射的なら M は可除 (つまり任意の $0\neq r\in R$ にたいし $M\xrightarrow{r}M$ は全射) であることを示せ。

(2) R が PID なら上の逆が成り立つことを示せ。

[6] $n\geq 1$ を自然数とする。

(1) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-加群 M にたいし、$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(M,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ を示せ。

(2) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$-加群として入射的でないが、$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-加群として入射的であることを示せ。

[7] 次の同型をを示せ。

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\mathbb{Z})\simeq\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\quad \mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}_1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})\simeq\mathbb{Z}/(m,n)\mathbb{Z}.$$