RIMS Kôkyûroku Bessatsu
Bx (200x), 000–000

高次元ハッセ原理と類体論の一般化 (Cohomological Hasse principle and higher dimensional class field theory)

By

斎藤秀司 (Shuji Saito)*

Abstract

In this survey paper we report on recent progresses on a conjecture of Kazuya Kato which generalizes the Hasse principle for the Brauer group of a global field to the so-called cohomological Hasse principle for an arithmetic scheme X.

We will also explain its implications on finiteness of motivic cohomology, special values of zeta functions and a generalization of higher dimensional class field theory.

Contents

序章

この論説は，数学セミナー 2010 年 3 月号および 4 月号に掲載された論説に加筆および少々の修正を施したものである．修正原稿を報告集に掲載することを許可していただいた日本評論社に感謝します.

Received April 26, 2010. Revised July 24, 2010.
2000 Mathematics Subject Classification(s): 2000 Mathematics Subject Classification(s):
Key Words: *Key Words*:
Supported by JAPAN SUPPORT
*Graduate School of Mathematical Science, The University of Tokyo, 3-8-1 Komaba Meguro-ku Tokyo 153-8914, Japan.
e-mail: sshuji@msb.biglobe.ne.jp
© 200x Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University. All rights reserved.

この論説の目標は類体論の一般化を解説することである．類体論は 20 世紀前半に高木貞治と E. Artin により完成された偉業で整数論の礎である．その後，類体論はふたつの方向に一般化された．ひとつは類体論の非アーベル化である．これについては，吉田輝義氏の明快な解説 (数学セミナー 2010 年 3 月号特集・高木貞治と類体論) を参照されたい．この論説で扱うのは類体論の一般化のもうひとつの方向，類体論の高次元化および高次化である．類体論とは，K を大域体 (つまり有限次代数体あるいは有限体上の一変数関数体) とするとき，K の最大アーベル拡大のガロア群を，K に付随した情報のみを用いて統制する理論である．類体論の高次元化とはこの理論を，K が高次元の体 (つまり有理数体あるいは有限体上の高い超越次数を持つ関数体) へと拡張する理論である．これについて 2 段階の発展が起こった．最初は，1980 年始めの S.Bloch[B1] の革新的な仕事に触発され加藤-斎藤 [KS2] が行った代数的 K 理論を用いた類体論の高次元化である．次に，今世紀に入ってドイツ人数学者たち (Kerz-Schmidt-Wiesend, Schmidt-Spiess) による高次元類体論の新しい流れが湧きあがった．これは加藤-斎藤の高次元類体論の本質的な改良を与えるものである．さらにこの流れは，モチーフ (あるいはモチフィックコホモロジー) の理論の流れと交錯し高次元類体論の高次化という海原へと至っている．類体論の起源からこれまでの流れを概観することをこの記事の目標とする．

第 1 節では，類体論の始祖であるガウスの業績から説き起こし，高木-Aritin の主定理までを，非専門家にも理解できるよう配慮しつつ解説する．第 2 節では，類体論の高次元化について解説する．これは，スキーム論による類体論の幾何学化を通して行われる．第 3 節では，モチフィック (コ) ホモロジーの理論について概観する．モチフィック (コ) ホモロジーとは，有限次代数体の整数環のイデアル類群や単数群，あるいは代数多様体のチャウ群などを一般化したもので，数論的多様体のゼータ関数とも密接に関連する重要な研究対象である．高次元類体論が，数論的多様体のモチフィックホモロジーとアーベル基本群との同型として記述される．第 4 節で，モチフィックホモロジーを用いた高次元類体論の高次化を述べる．高次元類体論におけるモチフィックホモロジーとアーベル基本群との同型が，高次のモチフィックホモロジーとエタールホモロジーとの同型へと昇華される．さらに，高次元類体論の高次化のプロセスの核心部分であるハッセ原理のコホモロジー論的高次元化について解説する．ここで述べられる高次元ハッセ原理に関する主定理の証明の概略が第 5 節で与えられる．最後の節では，ハッセ原理の高次元化のゼータ関数の特殊値の問題への応用を述べる．

§1. 古典的類体論

ふたつの体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$，$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ について考える．これらは $\mathbb{Q}$ の 2 次拡大体で，群の同型

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{-1})/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

が成り立つ．上の同型から，ふたつの体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$，$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ の数論的な違いをみることはできない．一方，$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ が円分体 $\mathbb{Q}(\zeta_4)$ (ζ_n は 1 の原始 n 乗根) であるという事実より

同型

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{-1})/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times$$

が成り立つ．$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ についてもこれを円分体 $\mathbb{Q}(\zeta_8)$ に埋め込むことにより同型

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times/\{\pm 1\}$$

を得る．ここまで来るとふたつの体の数論的な違いがはっきりする．実際，これらの同型から次の事実が導ける．

定理 1.1. (Gauss) p を奇素数とすると次の同値が成り立つ．

$$p = x^2 + y^2 \text{ なる } x, y \in \mathbb{Z} \text{ が存在する} \Leftrightarrow p \equiv 1 \bmod 4,$$

$$p = x^2 - 2y^2 \text{ なる } x, y \in \mathbb{Z} \text{ が存在する} \Leftrightarrow p \equiv \pm 1 \bmod 8.$$

一般に K を有限次代数体，$\mathcal{O}_K$ をその整数環とすると，任意のイデアル $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K$ は素イデアルの積

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{e_r}$$

に分解するという事実を思い出そう．ガウスの整数環 $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ が単項イデアル整域 (PID) であることから次の同値が成り立つ．

$$p = x^2 + y^2 \text{ なる } x, y \in \mathbb{Z} \text{ が存在する} \Leftrightarrow (p) = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \ \subset \ \mathbb{Z}[\sqrt{-1}].$$

ここで $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ は $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ の素イデアルである．$p = x^2 - 2y^2$ に関しても $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ を使って同様の言い換えができる．

以上の考察から次の問題が自然に生じる．

問題 1.2. 有限次代数体 K とアーベル拡大 L/K が与えられたとき，そのガロア群 $\mathrm{Gal}(L/K)$ を素イデアルの分解法則 (つまり $\mathcal{O}_K$ の素イデアル $\mathfrak{p}$ にたいし，$\mathfrak{p}\mathcal{O}_L$ がどのように $\mathcal{O}_L$ の素イデアルの積に分解するかを与える法則) がわかるように記述せよ．

例 1 有理数体 $\mathbb{Q}$ の 2 次拡大の場合に考えてみる．$a \in \mathbb{Z}$ を平方因子を含まない整数とし，2 次拡大 $L = \mathbb{Q}(\sqrt{a})$ を考える．p を有理素数で $(p, 2a) = 1$ とする．ルジャンドル記号

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} \quad 1 & (\text{整数 } x \text{ が存在して } a \equiv x^2 \bmod p \text{ となる場合}) \\ -1 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

を思い出そう．

命題 1.3. 次の同値が成り立つ.

$$p\mathcal{O}_L \text{ は素イデアル } \Leftrightarrow \left(\frac{a}{p}\right) = -1$$

$$p\mathcal{O}_L = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \ \Leftrightarrow \left(\frac{a}{p}\right) = 1$$

(ただし $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ は $\mathcal{O}_L$ の素イデアル)

したがって問題 1.2 はルジャンドル記号の計算に帰着され，ガウスの平方剰余の相互法則によりその答えが与えられるわけである.

例 2 円分体の場合を考えてみよう．n を自然数として円分体 $L = \mathbb{Q}(\zeta_n)$ を考える．ここで ζ_n は 1 の原始 n 乗根である．その整数環は $\mathcal{O}_L = \mathbb{Z}[\zeta_n]$ である．$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q})$ は非常に具体的な記述をもつ．円分多項式の規約性より同型

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \xrightarrow{\cong} \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q})\ ;\ a \to \sigma_a \tag{1.1}$$

が成り立つ．ここで $\sigma_a \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q})$ は $\sigma_a(\zeta_n) = \zeta_n^a$ により定まる．さらに次の定理が問題 1.2 への解答を与えてくれる.

定理 1.4. p を有理素数で $(p,n) = 1$ とし，f を σ_p の位数とする (同型 (1.1) より $f = \min\{k \in \mathbb{N} \mid p^k \equiv 1 \bmod n\}$ である)．また $r = [L:K]/f$ とおく．このとき $p\mathcal{O}_L$ の素イデアルへの分解は

$$p\mathcal{O}_L = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r \subset \mathbb{Z}[\zeta_n]$$

で与えられる．ここで $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_r$ は 互いに異なる $\mathcal{O}_L$ の素イデアルで，その剰余体 $\mathcal{O}_L/\mathfrak{p}_i$ は $\mathbb{F}_{p^f}$ に等しい.

一般の有限次代数体のアーベル拡大 L/K の場合はどうであろうか?　実はそのヒントが円分体の場合の同型 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \cong \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q})$ にある．$P_\mathbb{Q}$ を有理素数全体の集合とし，$\Sigma \subset P_\mathbb{Q}$ を n を割る素数たちの部分集合とする．このとき次の完全系列が存在する.

$$\mathbb{Q}(n) \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{p \in P_\mathbb{Q} - \Sigma} \mathbb{Z} \xrightarrow{\rho} \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}) \to 0$$

ここで

$$\mathbb{Q}(n) := \left\{ a \in \mathbb{Q}^\times \ \middle|\ a = 1 + \frac{nc}{b} > 0,\ b, c \in \mathbb{Z},\ \ (b,n) = 1 \right\},$$

また写像 ρ, δ は

$$\rho\big((e_p)_{p \in P_\mathbb{Q} - \Sigma}\big) = \prod_{p \in P_\mathbb{Q} - \Sigma} (\sigma_p)^{e_p}\ ,$$

$$\delta(a) = \big(v_p(a)\big)_{p \in P_\mathbb{Q} - \Sigma}$$

で与えられる．ここで $v_p(a)$ は $a \in \mathbb{Q}^\times$ の p 進付値 (つまり p で何回割ることができるか) である.

この完全系列は同型 (1.1) を使って容易に示せることであるが，$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$ というわかりやすい有限アーベル群をわざわざふたつの無限群の間の写像の余核として表していることに注目しよう．大切なポイントは，$\sigma_p \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q})$ という特徴的な元が各素数 p ごとに存在する点である．実はこのような元が一般の有限次代数体のアーベル拡大にたいしても存在するのである．

L/K を有限次代数体のアーベル拡大とし，P_K を $\mathcal{O}_K$ の素イデアル全体の集合とする．

命題 1.5. $\mathfrak{p} \in P_K$ が L/K で不分岐 (つまり $\mathfrak{p}\mathcal{O}_L$ は $\mathcal{O}_L$ において互いに異なる素イデアルの積 $\mathfrak{p}\mathcal{O}_L = \mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_r$ に分解する) とする．このとき次の性質を満たす $\sigma_\mathfrak{p} \in \mathrm{Gal}(L/K)$ がただひとつ存在する．

$$\sigma_\mathfrak{p}(x) \equiv x^q \bmod \mathfrak{P}_i \ \ (\forall x \in \mathcal{O}_L,\ 1 \leqq \forall i \leqq r)$$

ここで q は有限体 $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$ の位数である．$\sigma_\mathfrak{p} \in \mathrm{Gal}(L/K)$ は $\mathfrak{p}$ におけるフロベニウス写像と呼ばれる．

$\Sigma \subset P_K$ を L/K において分岐する (つまり不分岐でない) 素イデアルの集合とする (これは有限集合であることがわかる)．命題 1.5 より自然な写像

$$\rho_{L/K} : \bigoplus_{\mathfrak{p} \in P_K - \Sigma} \mathbb{Z} \to \mathrm{Gal}(L/K)\ ;\ (e_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p} \in P_K - \Sigma} \to \prod_{\mathfrak{p} \in P_K - \Sigma} (\sigma_\mathfrak{p})^{e_\mathfrak{p}} \tag{1.2}$$

が定義される．これにたいし，次の事実が知られている．

- $\rho_{L/K}$ は全射である (チェボタレフの密度定理)．
- $\mathfrak{p} \in P_K - \Sigma$，$f_\mathfrak{p}$ を $\sigma_\mathfrak{p}$ の $\mathrm{Gal}(L/K)$ における位数，$r = [L:K]/f_\mathfrak{p}$ とおく．このとき $\mathfrak{p}\mathcal{O}_L$ の素イデアルへの分解は

  $$\mathfrak{p}\mathcal{O}_L = \mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_r \subset \mathcal{O}_L$$

  で与えられる．ここで $\mathfrak{P}_1, \cdots, \mathfrak{P}_r$ は 互いに異なる $\mathcal{O}_L$ の素イデアルで，$[\mathcal{O}_L/\mathfrak{P}_i : \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}] = f_\mathfrak{p}$ が成り立つ．

以上より問題 1.2 は次に帰着される．

問題 1.6. $\mathrm{Ker}(\rho_{L/K})$ を決定せよ．言い換えれば，フロベニウス写像 $\sigma_\mathfrak{p} \in Gal(L/K)$ たちの間の関係式をすべて決定せよ．

これに完全な解答を与えたのが高木と Artin による類体論である．ここではモジュラスの理論の導入を避けるため少々変形した形で述べることにする．

有限次代数体 K と P_K の有限部分集合 Σ を固定する．さらに自然数 $n \in \mathbb{N}$ を固定する．$L_{\Sigma,n}$ を K のアーベル拡大 L で Σ の外の素イデアルが不分岐で，その次数 $[L:K]$ が n を割るものたちの合成体とする．このとき，$L_{\Sigma,n}$ は K の有限次拡大であることがわかる．これにたいして写像 (1.2)

$$\rho_{L_{\Sigma,n}/K}: \bigoplus_{\mathfrak{p}\in P_K-\Sigma} \mathbb{Z} \to \mathrm{Gal}(L_{\Sigma,n}/K)$$

を考えよう．$P_{K,\infty}$ を K の無限素点全体の集合とする．$\mathfrak{p} \in P_K \cup P_{K,\infty}$ にたいし，$K_\mathfrak{p}$ を K の $\mathfrak{p}$ における完備化とする．乗法群 $K^\times$ の部分群

$$K_{\Sigma,n} = \left\{ a \in K^\times \middle|\ a \in (K_\mathfrak{p}^\times)^n \quad (\forall \mathfrak{p} \in \Sigma \cup P_{K,\infty}) \right\}$$

($K^\times$ の元で，各 $\mathfrak{p} \in \Sigma \cup P_{K,\infty}$ にたいし，$K_\mathfrak{p}$ において n 乗となるもの全体) が定義される．$\mathfrak{p} \in P_{K,\infty}$ が実素点で n が偶数なら，$a \in (K_\mathfrak{p}^\times)^n$ は $\mathfrak{p}$ が与える埋め込み $\tau_\mathfrak{p}: K \hookrightarrow \mathbb{R}$ にたいして $\tau_\mathfrak{p}(a) > 0$ であることに同値である．$\mathfrak{p}$ が複素素点か，$\mathfrak{p}$ が実素点で n が奇数なら，$a \in (K_\mathfrak{p}^\times)^n$ は無条件である．

定理 1.7. (高木-Artin)$\rho_{L_{\Sigma,n}/K}$ は次の同型を誘導する．

$$\mathrm{Coker}\left(K_{\Sigma,n} \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{\mathfrak{p}\in P_K-\Sigma} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \right) \cong \mathrm{Gal}(L_{\Sigma,n}/K)$$

ここで写像 δ は次で与えられる．

$$\delta(a) = \big(v_\mathfrak{p}(a)\big)_{\mathfrak{p}\in P_K-\Sigma} \quad (a \in K_{\Sigma,n})$$

上述の定理の重要な帰結として不分岐類体論が従う．

定理 1.8. (Hilbert-Furtwängler) 自然な同型

$$Cl(K) \cong \mathrm{Gal}(H_K/K)$$

が存在する．ここで

$$Cl(K) = \mathrm{Coker}\big(K^\times \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{\mathfrak{p}\in P_K} \mathbb{Z}\big)$$

は K のイデアル類群で，H_K は K の狭義の最大不分岐アーベル拡大 (つまりすべての K の素イデアルが不分岐な拡大であって，すべての埋め込み $\tau: K \hookrightarrow \mathbb{R}$ にたいして $H_K \otimes_K \mathbb{R} \cong \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ となる最大のアーベル拡大) である．

§ 2. 類体論の高次元化

この節では類体論の高次元化について説明しよう．このために，まずスキーム論を用いた類体論の幾何学化から始める必要がある．

K を有限次代数体，$\mathcal{O}_K$ をその整数環として，$X = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ を考える．X は 1 次元のスキームで 2 種類の点をもつ．ひとつは生成点 (これはただひとつ) で，この点の X での閉包は X 自身である．もうひとつは閉点で，X の点であってその閉包が自分自身であるようなものである．$X_{(0)}$ を X の閉点全体の集合とすると，これは $\mathcal{O}_K$ の素イデアル全体の集合 P_K と同一視できる．

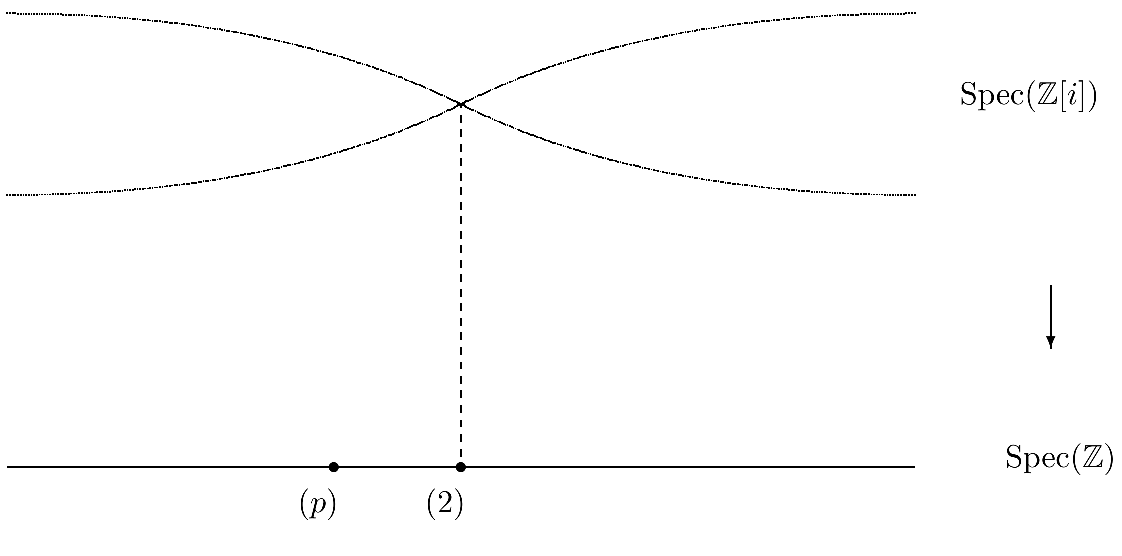
X の空でない開集合 $U \subset X$ を固定しよう．これにたいし $\pi_1^{ab}(U)$ という，代数的基本群のアーベル化が定義される．一言でいえば，U のアーベル有限エタール被覆 $V \to U$ 全体を分類するガロア群である．実際，$\Sigma = X - U$ とすると，前節で定義した $L_{\Sigma,n}$ を用いて自然な同一視

$$\pi_1^{ab}(U)/n = \mathrm{Gal}(L_{\Sigma,n}/K) \tag{2.1}$$

ができる (エタールは不分岐に対応する概念である)．例として

$$V = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[i]) - \{(1+i)\} \to U = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) - \{(2)\}$$

はアーベル有限エタール被覆である (右上図).



フロベニウス写像を，基本群を用いて幾何的に構成できる．U の閉点 $x \in U_{(0)}$ を固定する．x の剰余体 $\kappa(x)$ は有限体である．その位数を q とする．自然な埋め込み写像 $x \to U$ は基本群上の写像

$$\rho_x : \pi_1^{ab}(x) \to \pi_1^{ab}(U)$$

を誘導する．ここで $\pi_1^{ab}(x)$ は有限体 $\kappa(x)$ の絶対ガロア群 $\mathrm{Gal}(\overline{\kappa(x)}/\kappa(x))$ と同一視される．これは，q 乗写像という位相的生成元をもつ．この元の ρ_x による像

$$\sigma_x \in \pi_1^{ab}(U)$$

が同一視 (2.1) を通して命題 1.5 で定義したフロベニウス写像と一致する．

幾何的考察の利点は，高次元でもまったく同様に行うことが可能である点である．つまり U として整数環 $\mathbb{Z}$ あるいは有限体 $\mathbb{F}_p$ 上の有限型なスキームをとることができる．ポイントは U の閉点の剰余体が有限体である点である．まったく同様な議論により，各閉点 $x \in U$ にたいしてフロベニウス写像 $\sigma_x \in \pi_1^{ab}(U)$ を定義できる．

以下，U は整数環 $\mathbb{Z}$ あるいは有限体 $\mathbb{F}_p$ 上の有限型な正則スキームとする．$U_{(0)}$ を U の閉点全体の集合として，U 上のゼロサイクルの群を

$$Z_0(U) = \bigoplus_{x \in U_{(0)}} \mathbb{Z}$$

により定義する．上で定義したフロベニウス写像を用いて自然な写像

$$\rho_U : Z_0(U) \to \pi_1^{ab}(U)\ ;\ \big(n_x\big)_{x \in U_{(0)}} \to \prod_{x \in U_{(0)}} (\sigma_x)^{n_x}$$

が定義される．Lang により，ρ_U の像が $\pi_1^{ab}(U)$ において稠密であることが示された．そこで次の問題が自然に生ずる．

問題 2.1. ρ_U の核を決定せよ．

これにたいして最初の解答を与えたのが加藤-斎藤による高次元類体論である．上の U にたいし，U の適当なコンパクト化 $j : U \hookrightarrow X$ を選ぶ．つまり，X は整数環 $\mathbb{Z}$ あるいは有限体 $\mathbb{F}_p$ 上の固有的な整スキームで，j は開埋め込みである．加藤-斎藤 [KS2] は以下の構成を行った．

- イデアル層 $I \subset \mathcal{O}_X$ にたいし，「モジュラス I をもつ高次元イデール類群」
$$C_I(X) = H^d(X_{Nis}, K_d^M(\mathcal{O}_X, I)) \quad (d = \dim(X)),$$
が定義される．ここで X_{Nis} は X 上のグロタンディック位相 (Nisnevich 位相) で，$K_d^M(\mathcal{O}_X, I)$ は相対的なミルナー K 群の層である．
- $C_I(X)$ は X の関数体をいくつもの段階にヘンゼル局所化して得られる高次元局所体のミルナー K 群を用いてイデール表示される．
- $\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/I) \subset X - U$ のとき次の自然な全射が存在する．
$$\pi_I : Z_0(U) = \bigoplus_{x \in U_{(0)}} \mathbb{Z} \twoheadrightarrow C_I(X)$$
- 高次元相互写像
$$\rho_U \ :\ \varprojlim_{\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/I) \subset \Sigma} C_I(X) \ \to \pi_1^{ab}(U)$$
が定義される．ここで $\Sigma = X - U$ とおいた．

加藤-斎藤 [KS2] による高次元類体論の主定理は粗く述べると以下のようになる．

定理 2.2. ρ_U は (ほぼ) 同型である．

上述の類体論の高次元化には問題点がある．$\pi_I : Z_0(U) \to C_I(X)$ の核を記述することが困難なのである．よって定理 2.2 を用いて

$$\mathrm{Ker}\Big(Z_0(U) \xrightarrow{\rho_U} \pi_1^{ab}(U)\Big)$$

を記述することは困難であり，問題 2.1 に完全な解答を与えたとは言い難い．ただし $U = X$ (つまり U 自身がもともと固有的) である場合には以下の定理が導かれる ([B1], [KS1], [Sa1], [CTSS])．

定理 2.3. (高次元不分岐類体論) X を整数環 $\mathbb{Z}$ あるいは有限体 $\mathbb{F}_p$ 上の射影的な正則スキームとする．$X(\mathbb{R}) = \emptyset$，つまり射 $\mathrm{Spec}(\mathbb{R}) \to X$ が存在しないと仮定する (この仮定は定理の記述を簡略化するための便宜的なものである)．このとき高次元相互写像は自然な写像

$$\rho_X : \mathrm{CH}_0(X) \to \pi_1^{ab}(X)$$

を誘導し，これは (ほぼ) 同型である (X の関数体の標数がゼロなら同型で，正標数なら単射でその像は簡単に記述できる)．

ここで $\mathrm{CH}_0(X)$ は X 上のゼロサイクルの群 $Z_0(X)$ を有理同値で割った群で，X の 0 次元チャウ群と呼ばれる．詳しい定義を以下で与える．$X = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ (K は有限次代数体) なら $\mathrm{CH}_0(X)$ は K のイデアル類群 $Cl(K)$ に等しく，定理 2.3 は古典的な不分岐類体論 (定理 1.8) に同値である．

X の 0 次元チャウ群は

$$\mathrm{CH}_0(X) = \mathrm{Coker}\big(\bigoplus_{y \in X_{(1)}} \kappa(y)^\times \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{x \in X_{(0)}} \mathbb{Z}\big) \tag{2.2}$$

により定義される．ここで $X_{(1)}$ は X 上の曲線の生成点全体のなす集合である．X 上の曲線 $i : C \hookrightarrow X$ とその生成点 y にたいし，$\kappa(y)$ はその剰余体を表す．定義よりこれは C の関数体であり，$\kappa(y)$ は大域体 (有限次代数体あるいは有限体上の一変数関数体) であることに注意する．写像

$$\delta : \kappa(y)^\times \to Z_0(X) = \bigoplus_{x \in X_{(0)}} \mathbb{Z}$$

は次の合成写像である．

$$\kappa(y)^\times \xrightarrow{\delta_C} Z_0(\widetilde{C}) \xrightarrow{\pi_*} Z_0(C) \xrightarrow{i_*} Z_0(X)$$

ここで，$\pi : \widetilde{C} \to C$ は C の正規化で，δ_C は正則な曲線 $\widetilde{C}$ にたいする因子写像 ($\widetilde{C}$ 上の有理関数の因子をとる写像) で，π_* と i_* は射 π と i がゼロサイクルの群の上に誘導する写像である．

最近，ドイツ人数学者たち (Kerz-Schmidt-Wiesend, Schmidt-Spiess) が加藤-斎藤の類体論を大きく改良することに成功した．そこでは定理 2.3 が X が射影的でない場合に (付加的な仮定の下で) 見事な形で拡張されている．

定理 2.4. ([KeSc], [W], [ScSp]) U を整数環 $\mathbb{Z}$ あるいは有限体 $\mathbb{F}_p$ 上の正則スキームとする (固有的とは限らないことに注意)．U の関数体の標数と互いに素な自然数 n を固定する．このとき写像 $\rho_U : Z_0(U) \to \pi_1^{ab}(U)$ は同型

$$\mathrm{Coker}\Big(\bigoplus_{y\in U_{(1)}} \kappa(y)_{\Sigma,n} \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{x\in U_{(0)}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\Big) \cong \pi_1^{ab}(U)/n$$

を誘導する．ここで $\kappa(y)_{\Sigma,n}$ は $\kappa(y)^\times$ の部分群で以下で説明する．

上の左辺を式 (2.2) と比較すればこの定理が定理 2.3 の自然な拡張であることがわかる．また $\dim(U) = 1$ の場合にはこの定理は古典的な類体論 (定理 1.7) である．この定理は問題 2.1 にたいする明快な解答を与えている．

$\kappa(y)_{\Sigma,n}$ の定義をする．$U_{(1)}$ は U 上の曲線の生成点全体の集合である．$C \subset U$ を U 上の曲線とし，$y \in U_{(1)}$ をその生成点とする．$\widetilde{C}$ を C の正規化とし，$\overline{C}$ をそのコンパクト化とする ($\overline{C}$ は有限次代数体の整数環のスペクトラム, あるいは有限体上の射影的で滑らかな曲線である)．このとき

$$\kappa(y)_{\Sigma,n} = \big\{a \in \kappa(y)^\times \bigm| a \in \big(\kappa(y)_x^\times\big)^n \quad (\forall x \in \Sigma_y \cup P_{y,\infty})\big\}$$

ここで $\Sigma_y = \overline{C} - \widetilde{C}$，$P_{y,\infty}$ は $\kappa(y)$ の無限素点の集合，$\kappa(y)_x$ は $\kappa(y)$ の x における完備化である (定理 1.7 における $K_{\Sigma,n}$ の定義参照)．また写像 δ の定義は式 (2.2) における δ の定義と同様である．

§3. モチフィックコホモロジー

この節では，モチフィックコホモロジーの理論を概観する．Schmidt[Sc] と Schmidt-Spiess[ScSp] は，モチフィックコホモロジーによる高次元類体論の美しい解釈を与えた．まずこれを説明しよう．記号は定理 2.4 のとおりとする．さらに n と U に適当な条件 (tame 条件，U が有限体上のスキームで n がその標数と素なら満たされる) を仮定したとき，自然な同型

$$\mathrm{Coker}\Big(\bigoplus_{y\in U_{(1)}} \kappa(y)_{\Sigma,n} \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{x\in U_{(0)}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\Big) \cong H_0^S(U, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \tag{3.1}$$

が成り立つ．ここで右辺はU の次数 0 の Suslin ホモロジーである．一般にすべての自然数 $i \geqq 0$ にたいし，次数 i の Suslin ホモロジー $H_i^S(U, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ が定義される ([SV1] 参照). Suslin ホモロジーは，近年活発な研究がおこなわれているモチフィック (コ) ホモロジーの一種であり，代数的サイクルを用いて定義される．後でその定義を簡単に説明する．

式 (3.1) より高次元類体論が，U の 0 次の Suslin ホモロジーとそのアーベル基本群との間の自然な同型

$$H_0^S(U, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \pi_1^{ab}(U)/n \tag{3.2}$$

として記述されることがわかった．

Suslin ホモロジーあるいはモチフィック (コ) ホモロジーの定義を述べる前に，それが重要視される理由のひとつを説明しよう．整数論の重要な事実，解析的類数公式

$$\lim_{s \to 0} \zeta_K(s) \cdot s^{-\rho_0} = -\frac{|Cl(K)| \cdot R_K}{|(\mathcal{O}_K^\times)_{\mathrm{tors}}|} \tag{3.3}$$

から話を始める．ここで $\zeta_K(s)$ は有限次代数体 K のデデキントのゼータ関数で，ρ_0 は $\mathcal{O}_K$ の単数群 $\mathcal{O}_K^\times$ のアーベル群としての階数である．$(\mathcal{O}_K^\times)_{\mathrm{tors}}$ は $\mathcal{O}_K^\times$ のねじれ部分群 (つまり K に含まれる 1 のべき乗根全体のなす群) である．また $Cl(K)$ は K のイデアル類群で，R_K はディリクレの単数基準である．

この解析的類数公式を「数論的な指数定理」として見ることはできないであろうか? 一般に指数定理とは次の形をしている．

$$\boxed{\text{指数 (解析的不変量)}} = \boxed{\text{特性類 (たとえば オイラー標数)}}$$

モチフィックコホモロジー (あるいはその哲学) は，上の問いの探求から生まれたものともいえる．後で説明するように，適当な条件をみたすスキーム X と自然数 $i, r \in \mathbb{N}$ にたいしモチフィックコホモロジー

$$H_M^i(X, \mathbb{Z}(r))$$

が定義される．$X = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ (K は有限次代数体) の場合には

$$Cl(K) = H_M^2(X, \mathbb{Z}(1)), \quad \mathcal{O}_K^\times = H_M^1(X, \mathbb{Z}(1))$$

が成り立つ．またモチフィックコホモロジーから (スキーム X が定義されるコンテクストに応じて) さまざまなコホモロジー群へのレギュレーター写像とよばれる写像が存在する．これはモチフィックコホモロジーが種々のコホモロジー理論のなかで普遍的な理論である

ことを示唆している．

$$H^i_M(X,\mathbb{Z}(r)) \to \begin{cases} H^i_B(X,\mathbb{Z}(r)) \text{ (ベッチコホモロジー)} \\ H^i_D(X,\mathbb{Z}(r)) \text{ (Deligne コホモロジー)} \\ H^i_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}_\ell(r)) \text{ (エタールコホモロジー)} \\ H^i_{crys}(X/W(k)) \text{ (クリスタリンコホモロジー)} \\ \quad\vdots \end{cases}$$

ディリクレが定義したレギュレーター写像は，Deligne コホモロジーへのレギュレーター写像の特別な場合として解釈できる．また代数的 K 理論とスペクトラル系列

$$E_2^{p,q} = H^p_M(X,\mathbb{Z}(-\frac{q}{2})) \Rightarrow K_{-p-q}(X)$$

により結ばれる (位相的 K 理論における Atiyah-Hirzebruch のスペクトラル系列の代数的類似である)．

さてモチフィックコホモロジーのふたつの構成法について説明しよう．最初の構成法はモチーフの圏を用いたものである．k を体とし，Sm/k を k 上の滑らかなスキームのなす圏とする．Voevodsky[V1] は，k 上のモチーフの導来圏 $DM(k)$ および関手

$$M : Sm/k \to DM(k)\ ;\ X \to M(X)$$

を構成した (Levine と花村昌樹も独立に異なる構成法を与えている)．$X \in Sm/k$ のモチフィックコホモロジーおよびモチフィックホモロジーは，$DM(k)$ における射の空間

$$H^i_M(X,\mathbb{Z}(r)) = \mathrm{Hom}_{DM(k)}(M(X),\mathbb{Z}(r)[i]),$$

$$H_i^M(X,\mathbb{Z}(r)) = \mathrm{Hom}_{DM(k)}(\mathbb{Z}(r)[i],M(X))$$

として定義される．ここで $\mathbb{Z}(r)$ は $DM(k)$ の特別な対象でテイト対象と呼ばれる．$DM(k)$ の定義をここで解説することはしない．

モチフィック (コ) ホモロジーのもうひとつの定義が，Bloch の高次チャウ群 ([B2], [Le]) と Suslin ホモロジー ([SV1], [Sc]) である．一般に，デデキント環上の有限型なスキーム X にたいし

$$\mathrm{CH}^r(X,q) \text{ (Bloch の高次チャウ群)}$$
$$H_i^S(X,\mathbb{Z}) \text{ (Suslin ホモロジー)}$$

が定義される (後で定義を述べる)．$q=0$ の場合 $\mathrm{CH}^r(X,q)$ は X の余次元 r のチャウ群 $\mathrm{CH}^r(X)$ (X 上の余次元 r の代数的サイクルの有理同値類たちのなす群) と一致する．$DM(k)$ を用いた定義との間には次の比較定理が成り立つ．

定理 3.1.

(1) 体上の滑らかなスキーム X にたいし

$$H_i^M(X, \mathbb{Z}(0)) = H_i^S(X, \mathbb{Z}).$$

(2) 体上の滑らかなスキーム X にたいし

$$H_M^i(X, \mathbb{Z}(r)) = \mathrm{CH}^r(X, 2r-i).$$

Bloch の高次チャウ群と Suslin ホモロジーの定義を説明する前に，位相空間 X の特異ホモロジー群

$$H_q(X, \mathbb{Z}) := H_q(s(X, \bullet))$$

を復習しておこう．ここで $s(X, \bullet)$ は特異チェイン複体と呼ばれるアーベル群の複体

$$\cdots \to s(X, q) \xrightarrow{\partial} s(X, q-1) \xrightarrow{\partial} \cdots \to s(X, 0)$$

で，その次数 q の項は

$$s(X, q) = \bigoplus_{\Gamma} \mathbb{Z}[\Gamma] \quad (\Gamma \text{ はすべての連続写像 } \Delta_{top}^q \to X \text{ をわたる})$$

で与えられる．ここで

$$\Delta_{top}^q = \big\{(x_0, x_1, \cdots, x_q) \in \mathbb{R}^{q+1} \;\Big|\; \sum_{0 \leqq i \leqq q} x_i = 1,\ x_i \geqq 0\big\}$$

は位相的特異単体で，境界写像 ∂ は Δ_{top}^q の面への制限写像の交代和である．

Bloch の高次チャウ群と Suslin ホモロジーの定義は，位相空間の特異ホモロジー群の代数的類似を辿る．位相的特異単体 Δ_{top}^q の代数的類似は

$$\Delta^q = \mathrm{Spec}\big(\mathbb{Z}[t_0, \cdots, t_q]/(\sum_{i=0}^{q} t_i - 1)\big)$$

で，$\Delta^s = \{t_{i_1} = \cdots = t_{i_{q-s}} = 0\} \subset \Delta^q$ がその面である．$s(X, q)$ の類似は 2 種類あって，$X \times \Delta^q$ 上の代数的サイクルの空間たち

$$z^r(X, q) = \bigoplus_{\Gamma \subset X \times \Delta^q} \mathbb{Z}[\Gamma], \quad c_0(X, q) = \bigoplus_{\Xi \subset X \times \Delta^q} \mathbb{Z}[\Xi]$$

である．ここで Γ は $X \times \Delta^q$ 上の余次元 r の整閉部分スキームですべての面 $\Delta^s \subset \Delta^q$ と正しく交わるもの全体をわたり，Ξ は $X \times \Delta^q$ の整閉部分スキームで Δ^q 上有限であるもの全体をわたる．気持ちとしては，Γ や Ξ としてスキームの射 $f : \Delta^q \to X$ を考えたいところだが，これでは正しいコホモロジー群を生み出すことはできない (射 f のグラフを考えれば $X \times \Delta^q$ 上の代数的サイクルと見られるが，射のグラフだけでは十分でない).

これらから，位相空間の特異チェイン複体の類似であるサイクル複体

$$z^r(X,\bullet)\ :\ \cdots\to z^r(X,q)\xrightarrow{\partial} z^r(X,q-1)\xrightarrow{\partial}\cdots\xrightarrow{\partial} z^r(X,0),$$

$$c_0(X,\bullet)\ :\ \cdots\to c_0(X,q)\xrightarrow{\partial} c_0(X,q-1)\xrightarrow{\partial}\cdots\xrightarrow{\partial} c_0(X,0)$$

が生じる．Bloch の高次チャウ群と Suslin ホモロジーは，サイクル複体たちのホモロジー群

$$\mathrm{CH}^r(X,q):=H_q\big(z^r(X,\bullet)\big)$$

$$H_q^S(X,\mathbb{Z}):=H_q\big(c_0(X,\bullet)\big)$$

として定義される．また有限係数の Suslin ホモロジー群が

$$H_q^S(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}):=H_q\big(c_0(X,\bullet)\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\big)$$

により定義される．

§4.　高次元類体論の高次化とハッセ原理

いよいよこの記事の主定理を述べることができる．次の定理は，有限体上の多様体にたいする高次元類体論 (定理 2.4) をモチフィックコホモロジーの枠組みにおいて一般化したものである．

定理 4.1.　(Kerz-斎藤 [KeS], [Sa2]) U を有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の滑らかな多様体とし，n を $\mathrm{ch}(\mathbb{F}_q)$ と素な自然数とする．このときすべての自然数 i にたいし自然な同型

$$H_i^S(U,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\cong H^{i+1}_{\text{ét}}(U,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*:=\mathrm{Hom}\big(H^{i+1}_{\text{ét}}(U,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}),\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\big)$$

が存在する (右辺は，エタールコホモロジー $H^{i+1}_{\text{ét}}(U,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ の双対群である).

自然な同型

$$H^1_{\text{ét}}(U,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*\cong\pi_1^{ab}(U)/n$$

をとおして，定理 4.1 の $i=0$ の場合は高次元類体論 (式 (3.2) 参照)

$$H_0^S(U,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\cong\pi_1^{ab}(U)/n$$

に同値である．定理 4.1 の同型は，代数的サイクルを用いて定義される幾何的対象である Suslin ホモロジーをエタールコホモロジーというガロア群の類似物に結びつけるものと考えることができる．

定理 4.1 の証明で中心的な役割を果たすのが，**コホモロジー論的ハッセ原理**と呼ばれる事実である．これについて説明するために古典的な Hasse-Minkowski の定理を思い出そう．

定理 4.2. 有理数係数の n 変数 2 次形式

$$a_1X_1^2+\cdots+a_nX_n^2=0 \quad (a_1,\cdots,a_n\in\mathbb{Q})$$

が $\mathbb{Q}$ において非自明な解をもつための必要十分条件は，それが実数体 $\mathbb{R}$ およびすべての素数 p にたいする p 進体 $\mathbb{Q}_p$ において非自明な解をもつことである．

定理は $n=3$ の場合がもっとも重要なのだが，これをコホモロジー論的に解釈することができる．一般に体 k 上の 2 次形式

$$X^2-aY^2-bZ^2=0 \quad (a,b\in k^\times)$$

が k において非自明な解をもつための必要十分条件が

$$\{a,b\}=0\in H^2(k,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

で与えられる．ここで $H^*(k,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ は k のガロアコホモロジー (絶対ガロア群のコホモロジー) で，クンマー理論による同型 $h:k^\times/2\cong H^1(k,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ とカップ積

$$\cup: H^1(k,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\times H^1(k,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\to H^2(k,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

を用いて $\{a,b\}=h(a)\cup h(b)$ と定義される．

したがって定理 4.2 は自然な制限写像

$$H^2(\mathbb{Q},\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\to\bigoplus_{p\in P_\mathbb{Q}}H^2(\mathbb{Q}_p,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\ \oplus\ H^2(\mathbb{R},\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

が単射であることに同値である．ここで $P_\mathbb{Q}$ は有理素数全体の集合である．さらに各 $p\in P_\mathbb{Q}$ にたいする剰余同型写像

$$\partial_p: H^2(\mathbb{Q}_p,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\cong H^1(\mathbb{F}_p,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \tag{4.1}$$

により，定理 4.2 は次の写像 (剰余写像と呼ばれる)

$$H^2(\mathbb{Q},\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\xrightarrow{\partial}\bigoplus_{p\in P_\mathbb{Q}}H^1(\mathbb{F}_p,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\ \oplus\ H^2(\mathbb{R},\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \tag{4.2}$$

の単射性に同値となる．

上の事実は大域体のブラウアー群のハッセ原理へと一般化される．$X=\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ (ただし $\mathcal{O}_K$ は有限次代数体 K の整数環)，あるいは X は有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の射影的で滑らかな曲線で，K をその関数体とする．話を簡単にするために $X(\mathbb{R})=\emptyset$ (つまり体の埋め込み $K\hookrightarrow\mathbb{R}$ は存在しない) と仮定する．このとき (4.2) を一般化した複体

$$H^2(K,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1))\xrightarrow{\partial}\bigoplus_{x\in X_{(0)}}H^1(x,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \tag{4.3}$$

が存在する．ここで $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1)$ は，$(\mathrm{ch}(K), n) = 1$ の場合には 1 の n 乗根全体のなすガロア加群 μ_n を表す (そうでない場合の説明は省略する)．自然な同型

$$H^2(K, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1)) \cong Br(K)[n]$$

が成り立つ．ここで $Br(K)$ は K のブラウアー群 (つまり K 上の斜体の同型類全体の集合に適当な群構造を与えたもの) の n ねじれ部分群 (n 倍して消える元全体) である．したがって以下に述べる K のブラウアー群のハッセ原理が，(4.3) における ∂ の単射性に同値となる．

定理 4.3. (Brauer-Hasse-Noether) K を大域体とする．$\overline{P}_K$ を K の素点全体の集合とし，K_v を K の $v \in \overline{P}_K$ における完備化とする．K 上の中心的単純環 A にたいし次の同値が成り立つ．

$$A \cong M_n(K) \Leftrightarrow A \otimes_K K_v \cong M_n(K_v) \quad (\forall v \in \overline{P}_K)$$

ここで $M_n(L)$ は L 上の n 次正方行列環である．

上で A として四元数環 $A = \left(\dfrac{a, b}{K}\right)$ $(a, b \in K)$ をとれば定理の主張は K 上の 2 次形式 $X^2 - aY^2 - bZ^2 = 0$ にたいするハッセ原理に同値となる．

1985 年加藤和也 [K] は定理 4.3 を高次元化した予想を提出した．有限体あるいは整数環上の有限型スキーム X にたいし次のアーベル群の複体 $KC_\bullet(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ (**加藤複体**と呼ばれる) が定義される．

$$\cdots \to \bigoplus_{x \in X_{(a)}} H^{a+1}(x, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(a)) \to \bigoplus_{x \in X_{(a-1)}} H^a(x, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(a-1)) \to \cdots$$
$$\cdots \to \bigoplus_{x \in X_{(1)}} H^2(x, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1)) \to \bigoplus_{x \in X_{(0)}} H^1(x, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

ここで $X_{(a)} = \{x \in X \mid \dim\overline{\{x\}} = a\}$ (つまり X での閉包が次元 a である点の集合) である．$H^*(x, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(a))$ は x の剰余体 $\kappa(x)$ のガロアコホモロジーで，その係数 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(a)$ は，$(\mathrm{ch}(K), n) = 1$ の場合には $\mu_n^{\otimes a}$ (1 の n 乗根全体のなすガロア加群 μ_n の自分自身との a 回テンソル積) である．$\bigoplus_{x \in X_{(a)}}$ の項が次数 a をもつ．ちなみに $x \in X$ にたいし，$x \in X_{(a)}$ であることと，$\kappa(x)$ が有限体上の超越次数 a の関数体あるいは有理数体上の超越次数 $a-1$ の関数体であることは同値である．

$\dim(X) = 1$ の場合，つまり $X = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ (K は有限次代数体) あるいは X は有限体上の射影的で滑らかな曲線の場合を見てみよう．いずれの場合も K を X の関数体とする．定義より X の加藤複体 $KC_\bullet(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ は

$$\bigoplus_{\eta \in X_{(1)}} H^2(\eta, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1)) \to \bigoplus_{x \in X_{(0)}} H^1(x, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

となる．$X_{(1)}$ の元は X の生成点の 1 点のみである事実と，剰余同型写像 (式 (4.1) 参照) により，$KC_\bullet(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ は

$$H^2(K,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1)) \to \bigoplus_{x\in X_{(0)}} H^2(K_x,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1))$$

に同型である．よって K のブラウアー群にたいするハッセ原理が，$KC_\bullet(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ の次数 1 のホモロジー群 $H_1\big(KC_\bullet(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\big)$ の消滅に言い換えられる．

有限体あるいは整数環上の有限型スキーム X にたいし，**加藤ホモロジー**を

$$KH_a(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = H_a\big(KC_\bullet(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\big) \quad (a \geqq 0) \tag{4.4}$$

で定義する．加藤ホモロジーは X の数論的性質を反映する重要な不変量である．大域体のブラウアー群のハッセ原理の高次元化が，加藤ホモロジーを用いて次のように定式化される．

予想 4.4. (**加藤のハッセ原理** [K]) X を有限体 $\mathbb{F}$ 上の固有的で滑らかな多様体，あるいは有限次代数体の整数環 $\mathcal{O}_k$ 上の固有的で平坦な正則スキームとする．(簡単のため)$X(\mathbb{R}) = \emptyset$ を仮定する．このとき

$$KH_a(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0 \quad (\forall a > 0).$$

ちなみに加藤複体 $KC_\bullet(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ に現れる $H^{a+1}(x,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(a))$ は $a \geqq 2$ なら無限群で，次数 a の項は無限群の無限直和となる．このように大きな群を項に持つ複体のホモロジーが消滅することは驚くべきことである．

加藤のハッセ原理とモチフィックコホモロジーの関係が次の補題により与えられる．

補題 4.5. X を有限体あるいは整数環上の有限型な正則スキームとし，$d = \dim(X)$ とする．このとき次の長完全系列が存在する．

$$\cdots \to KH_{2d-i+2}(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to H^i_M(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d)) \to$$
$$H^i_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d)) \to KH_{2d-i+1}(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to \cdots$$

ここで $H^i_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d))$ はエタールコホモロジー，$H^i_M(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d))$ は (有限係数の) モチフィックコホモロジーである．

一言でいえば，加藤ホモロジーとは，モチフィックコホモロジーとエタールコホモロジーの間のギャップを埋めるものである．補題の証明には，近年 Rost と Voevodsky により証明された Bloch-加藤予想 ([V2], [SJ]) とその帰結である Beilinson-Lichtenbaum 予想 ([SV2], [GL]) が用いられる．

エタールコホモロジーは有限群であることが知られている．よって加藤予想からモチフィックコホモロジーの有限性が従うことになる．これは有限次代数体のイデアル類群の有限性 (Minkowski の定理) や単数群の有限生成性 (Dirichlet の定理) の高次元化とみれる．

加藤のハッセ原理が示されている場合を述べる．$\dim(X)=1$ の場合は大域体のブラウアー群のハッセ原理である．$\dim(X)=2$ の場合は加藤氏自身により高次元類体論を用いて示された．さらに加藤ホモロジーの低い次数での消滅が以下の結果で示されていた．

定理 4.6. (Colliot-Thélène[CT], 諏訪 [Sw]) X が有限体上の射影的で滑らかな多様体とすると

$$KH_a(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})=0 \quad (0<a\leqq 3).$$

ただし $KH_a(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})=\varinjlim_{n} KH_a(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

定理 4.7. (Jannsen-斎藤 [JS1]) X が有限次代数体の整数環上の射影的で平坦な正則スキームでいたるところ半安定還元をもつとすると

$$KH_a(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})=0 \quad (0<a\leqq 3).$$

加藤のハッセ原理にたいする一般的なアプローチを初めて提出したのが以下の結果である．

定理 4.8. (Jannsen-斎藤 [JS2]) X が有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の射影的で滑らかな多様体とする．$a>0$ を自然数として，$a\leqq 4$ あるいは以下に述べる条件 $\mathbf{(RES)}_{q,\mathbb{F}_q}$ を $q=a-2$ にたいし仮定する．このとき $KH_a(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})=0$.

定理の証明では，Deligne[D] による Weil 予想の証明および特異点の解消が重要な役割を果たす．とくに定理の $a=4$ の場合の証明は，2 次元エクセレントスキームの特異点の解消に関する新しい結果 (以下に述べる定理 4.9) が用いられる．この定理は加藤ホモロジーの次数 4 以下での消滅を無条件で示しており定理 4.6 の拡張となっている．

一般にスキーム S にたいし次の条件を考える．

$\mathbf{(RES)}_{q,S}$ S 上有限型な正則スキーム Z と次元が q 以下の閉部分スキーム $W\subset Z$ にたいし，固有的な双有理写像 $Z'\to Z$ が存在して次の条件を満たす.

- Z' は正則かつ $\pi^{-1}(Z-W)\to Z-W$ は同型である.
- W の逆像の被約化 $\pi^{-1}(W)_{red}$ は Z' 上の単純正規交叉因子である.

S が標数 0 の体なら $\mathbf{(RES)}_{q,S}$ は広中の定理である．一般には次の事実が示されている．

定理 4.9. (広中，Cossart-Jannsen-斎藤 [CJS]) S がエクセレント (たとえばデデキント環上有限型) で $q \leqq 2$ なら $\mathbf{(RES)}_{q,S}$ は成り立つ.

加藤のハッセ原理に関する最新の結果が次の定理である.

定理 4.10. (Kerz-斎藤 [KeS], [Sa2]) X が有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の固有的で滑らかな多様体とする．$\mathrm{ch}(\mathbb{F}_q)$ と素な自然数 n にたいし

$$KH_a(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0 \quad (\forall a > 0).$$

高次元類体論の高次化 (定理 4.1) は定理 4.10 から，補題 4.5 やモチフィックコホモロジーに関するいくつかの深い事実 (たとえば定理 3.1) を用いて導かれる.

定理 4.10 の証明では，定理 4.8 の証明法を改良することにより，特異点の解消を次の Gabber 定理 (de Jong の alteration の精密化，[Il] 参照) に置き換える.

定理 4.11. Z を完全体 F 上の滑らかな多様体とし，$W \subset Z$ を真の閉部分スキームとする．ℓ を $\mathrm{ch}(F)$ と異なる素数とすると，固有的な全射 $\pi : Z' \to Z$ が存在して次の条件を満たす.

- Z' は F 上滑らかで，$\pi^{-1}(W)_{red}$ は Z' 上の単純正規交叉因子である.
- 空でない開集合 $U \subset Z$ が存在して $\pi^{-1}(U) \to U$ は有限な射でその次数は ℓ と素である.

§5. 主定理の証明の概略

この説で定理 4.10 の証明の概略を与えることにする．詳しいことは [Sa2] を参照されたい．以下，有限体 $F = \mathbb{F}_q$ を固定する．$\mathcal{C}$ を F 上の有限型かつ分離的なスキーム全体のなす圏とし，$\mathcal{C}_*$ を $\mathcal{C}$ と同じ対象をもち固有射をその射の集合にもつ圏とする.

定義 5.1. $\mathcal{C}$ 上のホモロジー理論 $H = \{H_a\}_{a \in \mathbb{Z}}$ とは，共変関手

$$H_a(-) :\ \mathcal{C}_* \to Mod$$

の系列で次の条件を満たすものである.

(i) $\mathcal{C}$ 内の開埋め込み射 $j : V \hookrightarrow X$ にたいし写像 $j^* : H_a(X) \to H_a(V)$ が定義される.

(ii) $i : Y \hookrightarrow X$ を $\mathcal{C}$ 内の閉埋め込み射とし，$j : V = X - Y \hookrightarrow X$ を開埋め込み射とすれば，次の長完全系列が存在する.

$$\cdots \xrightarrow{\partial} H_a(Y) \xrightarrow{i_*} H_a(X) \xrightarrow{j^*} H_a(V) \xrightarrow{\partial} H_{a-1}(Y) \longrightarrow \cdots.$$

ここで i_* は共変関手性による写像で，∂ は境界写像と呼ばれる．また $f : X' \to X$ を $\mathcal{C}_*$ 内の射とし，$i' : Y' \hookrightarrow X'$ と $j' : V' \hookrightarrow X'$ をそれぞれ i と j の f による底変換とすれば，次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial"] & H_a(Y') \arrow[r, "i'_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_a(X') \arrow[r, "j'^*"] \arrow[d, "f_*"] & H_a(V') \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_*"] & H_{a-1}(Y') \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\partial"] & H_a(Y) \arrow[r, "i_*"] & H_a(X) \arrow[r, "j^*"] & H_a(V) \arrow[r, "\partial"] & H_{a-1}(Y) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

ここで f_* は共変関手性による写像である．

$\mathcal{C}$ 上のホモロジー理論 H と $X \in \mathcal{C}$ にたいし，niveau スペクトラル系列

$$E^1_{a,b}(X) = \bigoplus_{x \in X_{(a)}} H_{a+b}(x) \quad \Rightarrow \quad H_{a+b}(X) \tag{5.1}$$

が完全対の方法により構成される ([BO] 参照)．ただし，$X_{(a)}$ は X の点 x でその X での閉包 $\overline{\{x\}}$ の次元が a であるもの全体の集合で，$x \in X$ と自然数 i にたいし

$$H_i(x) = \varinjlim_{V \subseteq \overline{\{x\}}} H_i(V)$$

(V は $\overline{\{x\}}$ の開部分スキーム全体をわたる) と定義する．このスペクトラル系列は $\mathcal{C}$ 内の固有射にたいし共変的で，開埋め込みにたいし反変的である．

以下，n を $\mathrm{ch}(F)$ と互いに素な自然数とし、ℓ を $\mathrm{ch}(F)$ と異なる素数とする．また，Λ で $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$ のいずれかを表す．加藤ホモロジー (4.4)

$$KH(-,\Lambda) = \{KH_a(-,\Lambda)\}_{a \in \mathbb{Z}}$$

が $\mathcal{C}$ 上のホモロジー理論を与えることが定義から容易に従う．$\mathcal{C}$ 上のホモロジー理論として，もうひとつの重要な例がエタールホモロジーである．エタールホモロジーは，$\mathcal{C}$ 内の射 $f : X \to \mathrm{Spec}(F)$ にたいし

$$H^{\text{ét}}_a(X,\Lambda) := H^{-a}(X_{\text{ét}}, Rf^!\Lambda)$$

により定義される．ここで $Rf^!$ は [SGA4], XVIII, 3.1.4 で定義されたものである．とくに，f が滑らかな射で $d = \dim(X)$ とすれば，エタールホモロジーは

$$H^{\text{ét}}_a(X,\Lambda) = H^{2d-a}_{\text{ét}}(X,\Lambda(d))$$

とエタールコホモロジーで表すことできる．定理 4.10 の証明の最初のステップは自然な写像

$$\epsilon_a : \ H^{\text{ét}}_{a-1}(X,\Lambda) \to KH_a(X,\Lambda) \quad (a \geq 1, \ X \in \mathcal{C})$$

の存在を示すことである．これは次の二つの事実から従う．

- エタールホモロジーに付随する niveau スペクトラル系列 (5.1) にたいし $E^1_{a,b}(X) = 0$ $(b < -1)$ が成り立つ.
- 自然な同型 $E^2_{a,-1}(X) \simeq KH_a(X, \Lambda)$ が成り立つ ([JSS] 参照).

写像 ϵ_a は関手の自然変換

$$\epsilon:\ H^{\text{ét}}(-,\Lambda)[-1] \to KH(-,\Lambda).$$

を引き起こす．ここで考察の対象を $\Lambda = \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$ の場合に絞り，$KH_a(X,\Lambda)$，$H^{\text{ét}}_a(X,\Lambda)$ を $KH_a(X)$，$H^{\text{ét}}_a(X)$ と略記する．各自然数 $d > 0$ にたいし次の主張を考える．

KC(d): 全ての連結で F 上滑らかかつ射影的な $X \in \mathcal{C}$ で $\dim(X) \le d$ なるものと全ての自然数 $a \ge 1$ にたいし $KH_a(X) = 0$ が成り立つ.

主張 **KC**(d) を d に関する帰納法により証明する．証明の重要なステップは次の主張を示すことである.

主張 5.2. **KC**$(d-1)$ を仮定する．$X \in \mathcal{C}$ が連結で F 上滑らかかつ射影的とし，$dim(X) = d$ とする．Y を X 上の単純正規交叉因子とし，Y の既約成分の一つは X 上の豊富な因子であると仮定する．このとき，$U = X - Y$ にたいし

$$\delta_a:\ H^{ét}_{a-1}(U) \xrightarrow{\epsilon_a} KH_a(U) \xrightarrow{\partial} KH_{a-1}(Y)$$

は，$1 \le a \le d$ にたいし単射で，$a \ge 2$ にたいし全射である.

主張の証明の要は，Jannsen-斎藤の結果 ([JS2], Lemma 3.4. その証明は Deligne の基本定理 ([D]) に基づいた "重さの議論" を用いる) である．詳しくは [Sa2], Lemma 3.10 を参照されたい.

KC$(d-1) \Longrightarrow$ **KC**(d) の証明の概略を説明しよう．$X \in \mathcal{C}$ が連結で F 上滑らかかつ射影的とし，$\dim(X) = d$ とする．$a \ge 1$ と $\alpha \in KH_a(X)$ を固定する．$\alpha = 0$ が示したい主張である．空でない開集合 $j: U \to X$ で条件

$$(*) \qquad j^*(\alpha) \text{ は } \epsilon_a : H^{\text{ét}}_{a-1}(U) \to KH_a(U) \text{ の像に入る}$$

を満たすものがとれる (ϵ_a の構成から容易に従う)．ここで $Y = X - U$ が X 上の単純正規交叉因子であると仮定しよう (一般の場合は後で議論する)．ベルティィニの定理により超曲面切断 $H \hookrightarrow X$ をうまくとって $Y \cup H$ が X 上の単純正規交叉因子であるようにすることができる．ここで，Y を $Y \cup H$ に置き換えて，U を $U - U \cap H$ に置き換える．置き換えた後でも条件 $(*)$ は満たされることに注意する．次の可換図式を考える.

$$\begin{tikzcd}
KH_{a+1}(U) \arrow[r, "\partial"] & KH_a(Y) \arrow[r] & KH_a(X) \arrow[r, "j^*"] & KH_a(U) \arrow[r, "\partial"] & KH_{a-1}(Y) \\
H^{\text{ét}}_a(U) \arrow[u, "\epsilon_{a+1}"] \arrow[ur, "\delta_{a+1}"'] & & & H^{\text{ét}}_{a-1}(U) \arrow[u, "\epsilon_a"] \arrow[ur, "\delta_a"'] &
\end{tikzcd}$$

仮定 $\mathbf{KC}(d-1)$ と主張 5.2 により，δ_a は単射で δ_{a+1} は全射である．求める主張 $\alpha = 0$ はこれから容易に従う．

$Y = X - U$ が X 上の単純正規交叉因子でない場合には，定理 4.11 を用いて射 $f : X' \to X$ で次の条件を満たすものをとる．

- X' は F 上滑らかで，$\pi^{-1}(Y)_{red}$ は X' 上の単純正規交叉因子である．
- 空でない開集合 $V \subset X$ が存在して $\pi^{-1}(V) \to V$ は有限な射でその次数 $\deg(f)$ は ℓ と互いに素である．

さらに証明の重要なステップとして加藤ホモロジーにたいする引き戻し写像

$$f^* : KH_a(X) \to KH_a(X')$$

の構成を行う．これは証明の技術的核心部分で，Rost[R] によるサイクル複体にたいする交叉理論を用いて遂行される．上述の特別な場合の議論を $\alpha \in KH_a(X)$ の引き戻し $f^*(\alpha) \in KH_a(X')$ にたいし適用して $f^*(\alpha) = 0$ を導くことができる．さらに f による順像 f_* をとることにより $f_* f^*(\alpha) = \deg(f) \cdot \alpha = 0$ を得る．ここで $\deg(f)$ は ℓ と互いに素であったので $\alpha = 0$ が従う ($KH_a(X)$ の係数は $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$ であることに注意)．これで主定理の証明が完結する．

§6. ゼータ関数の特殊値への応用

最後の節では，定理 4.10 の応用としてゼータ関数の特殊値に関する結果を紹介する．もともとモチフィックコホモロジーがゼータ関数の特殊値の問題にその研究の動機を発していたことを考えるとこのような応用は自然である．

有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の射影的で滑らかな多様体 X にたいしその合同ゼータ関数

$$\zeta(X, s) = \exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty} |X(\mathbb{F}_{q^n})| \, \frac{q^{-ns}}{n}\Big) \quad (s \in \mathbb{C})$$

を考える．整数 $r \in \mathbb{Z}$ にたいしその特殊値

$$\zeta(X, r)^* := \lim_{s \to r} \zeta(X, s) \cdot (1 - q^{r-s})^{\rho_r} \quad (\rho_r := -\mathrm{ord}_{s=r}\zeta(X, s))$$

は重要な研究対象である．これについてこれまで多くの研究がなされているが，それらをここで紹介することはしない．Grothendieck と Deligne の仕事により

$$\zeta(X, r)^* \in \mathbb{Q}^{\times}$$

であることを注意しておく．定理 4.10 の応用として次の結果が示される．

定理 6.1. (Kerz‐斎藤 [KeS]) X を有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の射影的で滑らかな多様体とし，$d=\dim(X)$，$p=\mathrm{ch}(\mathbb{F}_q)$ とおく．このとき全ての整数 i にたいし，モチフィックコホモロジー $H^i_M(X,\mathbb{Z}(d))$ のねじれ部分群 $H^i_M(X,\mathbb{Z}(d))_{\mathrm{tors}}$ は p べき部分を除外すれば有限で，次の等式が p べき部分を無視して成り立つ

$$\zeta(X,0)^* = \prod_{1 \leqq i \leqq 2d} \left| H^i_M(X,\mathbb{Z}(d))_{\mathrm{tors}} \right|^{(-1)^i} .$$

さらに，$d=\dim(X) \leqq 4$ なら上の事実は p べき部分を含めて成立する．

3 節で登場した解析的類数公式 (3.3) はモチフィックコホモロジーを用いて

$$\lim_{s\to 0} \zeta(X,s)\cdot s^{-\rho_0} = -\frac{|H^2_M(X,\mathbb{Z}(1))_{\mathrm{tors}}|}{|H^1_M(X,\mathbb{Z}(1))_{\mathrm{tors}}|}\cdot R_K$$

と書き換えることができる．ここで $X=\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ (K は有限次代数体) で，$H^2_M(X,\mathbb{Z}(1))$ は K のイデアル類群 $Cl(K)$ に，$H^1_M(X,\mathbb{Z}(1))$ は K の単数群 $\mathcal{O}_K^\times$ に等しい．したがって定理 6.1 は解析的類数公式の幾何的類似とも見ることができる．定理 6.1 に Dirichlet のレギュレーター R_K の類似が登場しないのは，有限体上の射影的で滑らかな多様体 X のモチフィックコホモロジー $H^i_M(X,\mathbb{Z}(d))$ が $i=2d$ を除いて有限群である (と予想される) ことに由来する．

References

[B1] S. Bloch, *Higher Algebraic K-theory and class field theory for arithmetic surfaces*, Ann. of Math. **114** (1981), 229–265.

[B2] S. Bloch, *Algebraic cycles and higher algebraic K-theory*, Adv. Math. **61** (1986), 267–304.

[BK] S. Bloch and K. Kato, *p-adic étale cohomology*, Publ. Math. IHES **63** (1986), 107–152.

[BO] S. Bloch and A. Ogus, *Gersten's conjecture and the homology of schemes*, Ann. Ec. Norm. Sup. 4 serie **7** (1974), 181–202.

[CJS] V. Cossart, U. Jannsen and S. Saito, *Resolution of singularities for embedded surfaces*, in preparation (see http://www.mathematik.uni-regensburg.de/Jannsen).

[CT] J.-L. Colliot-Thélène, *On the reciprocity sequence in the higher class field theory of function fields*, Algebraic K-Theory and Algebraic Topology (Lake Louise, AB, 1991), (J.F. Jardine and V.P. Snaith, ed), 35–55, Kluwer Academic Publishers, 1993.

[CTSS] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc and C. Soulé, *Torsion dans le groupe de Chow de codimension deux*, Duke Math. J. **50** (1983), 763–801.

[D] P. Deligne, *La conjecture de Weil II*, Publ. Math. IHES **52** (1981), 313–428.

[GL] T. Geisser and M. Levine, *The Bloch-Kato conjecture and a theorem of Suslin-Voevodsky*, J. Reine Angew. **530** (2001), 55–103.

[Il] L. Illusie, *On Gabber's refined uniformization*, a preprint available at http://www.math.u-psud.fr/~illusie/

[JS1] U. Jannsen and S. Saito, *Kato homology of arithmetic schemes and higher class field theory*, Documenta Math. Extra Volume: Kazuya Kato's Fiftieth Birthday (2003), 479–538

[JS2] U. Jannsen and S. Saito, *Kato conjecture and motivic cohomology over finite fields*, preprint
(see http://www.lcv.ne.jp/~smaki/en/index.html).

[JSS] U. Jannsen, S. Saito and K. Sato, *Etale duality for constructible sheaves on arithmetic schemes*, http://arxiv.org/abs/0910.3759.

[K] K. Kato, *A Hasse principle for two dimensional global fields*, J. für die reine und angew. Math. **366** (1986), 142–183.

[KS1] K. Kato and S. Saito, *Unramified class field theory of arithmetic surfaces*, Ann. of Math. **118** (1985), 241–275.

[KS2] K. Kato and S. Saito, *Global class field theory of arithmetic schemes*, Contemporary Math. **55**(1986), 255–331.

[KeSc] M. Kerz and A. Schmidt *Covering data and higher dimensional global class field theory* J. of Number Theory **129** (2009), 2569–2599

[KeS] M. Kerz and S. Saito, *Kato conjecture and motivic cohomology for arithmetic schemes*, in preparation
(see http://www.lcv.ne.jp/~smaki/en/index.html).

[Le] M. Levine, *K-theory and motivic cohomology of schemes*, preprint.

[R] M. Rost, *Chow groups with coefficients*, Doc. Math. J. **1** (1996), 319–393.

[Sa1] S. Saito, *Unramified class field theory of arithmetic schemes*, Ann. of Math. **121** (1985), 251–281.

[Sa2] S. Saito, *Recent progress on the Kato conjecture*, preprint
(see http://www.lcv.ne.jp/~smaki/en/index.html).

[SJ] A. Suslin and S. Joukhovitski, *Norm Varieties* J. Pure Appl. Alg. **206** (2006), 245–276.

[Sc] A. Schmidt, *Singular homology of arithmetic schemes* Algebra Number Theory **1**(2) (2007), 183–222.

[ScSp] A. Schmidt and M. Spiess, *Singular homology and class field thoery of varieties over finite fields* J. Reine Angew. Math. **527** (2000), 13–37.

[SV1] A. Suslin and V. Voevodsky, *Singular homology of abstract algebraic varieties* Invent. Math. **123** (1996), 61–94.

[SV2] A. Suslin and V. Voevodsky, *Bloch-Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients*, in: Cycles, Transfer, and Motivic Homology Theories, Annals of Math. Studies **143**, Princeton University Press, 2000.

[Sw] N. Suwa, *A note on Gersten's conjecture for logarithmic Hodge-Witt sheaves*, K-theory **9** (1995), 245–271.

[V1] V. Voevodsky, *Triangulated categories of motives over a field*, Cycles, Tansfers, and Motivic Homology Theories, Annals of Math. Studies, Princeton University Press, 2000

[V2] V. Voevodsky, *On motivic cohomology with $\mathbb{Z}/l$-coefficients*, K-theory Preprint Archives,
http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0639/

[W] G. Wiesend, *Class field theory for arithmetic schemes*, Math. Z. **256**(4) (2007), 717–729.