論　　説

高次元類体論の現在

非アーベル化への展望と高次元 Hasse 原理

斎　藤　秀　司

序章

この論説の目標は高次元類体論の進展について，スキーム論の初歩を仮定したうえで専門外の方にも理解できるよう配慮しつつ解説することである．高次元類体論は類体論を高次元の体に拡張する理論である．類体論はフェルマーとガウスの偉業を源とし 20 世紀前半に高木貞治と E. Artin により完成された整数論の礎で，大域体 (有理数体の有限次拡大あるいは有限体上の一変数関数体) の最大アーベル拡大のガロア群を，その体に内在的な情報 (例えばイデアル類群) のみを用いて統制する理論である．類体論の高次元化とはこの理論を，有限生成体 (有理数体あるいは有限体上高い超越次数を持つ関数体) の場合へ拡張する理論である．これはスキーム論を用いて数論幾何学的問題として定式化される．整数環 $\mathbb{Z}$ 上有限型かつ連結なスキームを**数論的スキーム**と言う (有限体 $\mathbb{F}_p$ 上有限型な連結スキームもこれに含まれることを注意しておく)．これは有限生成体の幾何学化である．有限生成体のアーベル拡大を幾何学化する概念が数論的スキーム U の**アーベル被覆**である．射 $f : V \to U$ が被覆とは V が連結で f が有限エタール射[1)]であることを意味する．それがアーベルとは，f が引き起こす V と U の関数体の拡大がアーベル拡大であることである[2)]．

問題 1　正則な (つまり特異点をもたない) 数論的スキーム U のアーベル基本群 $\pi_1^{ab}(U)$ (U の代数的基本群のアーベル化で U 上のアーベル被覆を分類するガロア群) を U に内在的な幾何学的情報を用いて記述せよ．

Lang は，U が有限体上の多様体の場合に代数群を用いて問題 1 にたいする一つの解答を与えた ([Lan1], [Lan2], [Se2])．1970 年代に加藤と Parsin は独立に，代数的 K 理論を用いた問題 1 の研究を行った ([K1], [Par1], [Par2])．記念碑的論文 [K1] においては，問題 1 にたいする局所理論といえる結果が示されている．1980 年代初頭，S. Bloch[B1] は問題 1 にたいする革新的な業績をもたらした．これに触発され加藤-斎藤 [KS2] は代数的 K 理論を用いて問題 1 に答えることに成功した．今世紀に入って加藤-斎藤の類体論を本質的に改良するいくつかの進展が為された．$\pi_1^{ab}(U)$ を記述する群が，後者の結果では加藤-斎藤の場合より大きく簡明化されており，しかも最近著しい発展を遂げたモチフィックコホモロジーと関係づけられたのである ([KeS3], [ScSp])．この改良により高次元類体論にたいするふたつの新しい展望が開かれることになる．ひとつは高次元類体論の非アーベル化で，もうひとつはモチフィックコホモロジーを用いた高次元類体論の一般化 (高次化) である．前者はまだ予想の段階である．後者においては，最近大きな進展があった高次元ハッセ原理 (古典的類体論で重要な役割を果たすブラウアー群のハッセ原理を高次元化する原理) が本質的な役割を果たす．この論説

では最近の発展について解説する．

第 1 節では，類体論の始祖であるフェルマーとガウスの業績から説き起こし高木-Artin の主定理までを，代数学の基礎知識があれば理解できるよう解説する．

第 2 節では類体論の高次元化について解説する．この節はスキーム論の基礎知識があれば理解できるよう配慮した．スキーム論を用いた類体論の幾何学化を行い，そこから自然に高次元類体論の問題の定式化が為される．さらに加藤-斎藤の類体論を簡単に紹介する．

第 3 節では**高次元不分岐類体論**を解説する．高次元不分岐類体論は，Hilbert-Furtwängler の不分岐類体論の高次元化で，**コンパクト** (つまり $\mathbb{Z}$ 上あるいは $\mathbb{F}_p$ 上固有的) で正則な数論的スキーム X のアーベル基本群 $\pi_1^{ab}(X)$ を X の 0 次元チャウ群 $\mathrm{CH}_0(X)$ を用いて記述する ($\mathrm{CH}_0(X)$ は代数体のイデアル類群や代数曲線の因子類群の高次元版である)．

第 4 節では高次元不分岐類体論を一般化する**高次元順分岐類体論**を解説する．高次元順分岐類体論は (コンパクトとは限らない) 正則な数論的スキーム U の順分岐アーベル基本群 $\pi_1^{t,ab}(U)$ (U 上の順分岐アーベル被覆を分類する $\pi_1^{ab}(U)$ の商) を記述する．U 上の被覆 (有限エタール射) が**順分岐 (tamely ramified)** とは，U 上の被覆を U のコンパクト化上の有限射に延長したとき "境界での分岐が穏やか"であることを意味する．順分岐でない被覆を**暴分岐 (wildly ramified)** な被覆と言う．

第 5 節では，Kerz-斎藤 [KeS2] により示された有限体上の多様体にたいする暴分岐を許す類体論を解説する (定理 10)．有限体上の正則な多様体 U のアーベル基本群 $\pi_1^{ab}(U)$ が，U のコンパクト化の "モデュラス付き 0 次元チャウ群"を用いて記述される．証明では加藤-松田 ([K3], [Ma]) の高次元分岐理論が本質的に用いられる．第 6 節において分岐理論の復習を行った後に定理 10 の証明のアイデアを説明する．一言でいえば加藤-松田の分岐理論の代数的サイクルを用いた精密化が証明の鍵となる．

第 7 節では第 5 節で解説した有限体上の多様体 U の類体論の非アーベル化といえる Deligne の予想を解説する．類体論の非アーベル化は U の代数的基本群 $\pi_1(U)$ の ℓ-進表現，あるいは U 上の滑らかな ℓ-進層の理解を問題とする．U が 1 次元つまり曲線の場合には Lafforgue により完成された Langlands 対応により U の関数体のアデール環の保型表現論を用いてこの問題への答えが与えられる．高次元類体論の非アーベル化といっても高次元の保型表現論を展開するわけではない．Deligne 予想は，U 上の滑らかな ℓ-進層を，U 上の曲線上の滑らかな ℓ-進層の系により理解する枠組みを与える．第 5 節で解説した有限体上の多様体の類体論は，Deligne 予想の特別な場合 (ℓ-進層の階数が 1 の場合) を肯定的に解決するものである．

第 8 節では**ハッセ原理**の高次元化を解説する．ここでいうハッセ原理とは大域体上の中心的単純環にたいする (あるいは大域体のブラウアー群にたいする) 局所大域原理 (定理 16) で，古典的類体論において重要な役割を果たすものである．1985 年に加藤 [K2] がこれを高次元化する予想を提出した．数論的スキームと自然数 a, n にたいし加藤ホモロジー $KH_a(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ (次数 a，係数 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) が定義される．加藤ホモロジーは X の数論的性質を反映する重要な不変量である．ハッセ原理のコホモロジー論的言い換えが，"$X = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ ($\mathcal{O}_K$ は有限次代数体 K の整数環) あるいは有限体上固有的で正則な曲線 X にたいして $KH_1(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$"，と述べられる．加藤予想はこの事実を高次元化するものである．この節で有限体上の多様体にたいする加藤予想 (の標数と素な部分) を解決する Jannsen-Kerz-斎藤の定理 (定理 17) を紹介する．

第 9 節では Jannsen-Kerz-斎藤の定理の応用として，高次元類体論をモチフィックコホモロジー理論を用いて一般化することを解説する．モチフィック (コ) ホモロジーとは，有限次代数体の整数環のイデアル類群や単数群，あるいは代数多様体のチャウ群などを一般化したもので，数論的スキームのゼータ関数とも密接に関連する重要な研究対象である (この節でモチフィックコホモロジーの復習をする)．Schmidt と Spiess は，高次元順分岐類体論のモチフィックコホモロジーによる解釈を発見した．Schmidt-Spiess の結果が高次のモチフィックホモロジーとエタールコホモロジーの間の同型へと拡張されることを解説する (定理 18).

第 10 節では，Jannsen-Kerz-斎藤の定理のゼータ関数の特殊値の問題への応用を述べる．有限次代数体のデデキントのゼータ関数にたいする解析的類数公式の幾何学的類似 (有限体上の多様体の合同ゼータ関数の特殊値のモチフィックコホモロジーによる表示公式) が述べられる (定理 19)．証明の鍵となるのは，加藤ホモロジーがモチフィックコホモロジーとエタールコホモロジーの間のギャップを埋めるという事実である (補題 1).

第 11 節では，高次元ハッセ原理の幾何学的問題への応用を解説する．有限群 G が作用する準射影的で正則な多様体 X と商多様体 X/G の特異点解消 $g : \widetilde{Y} \to X/G$ で (被約化された) 例外集合 $E = g^{-1}(Z)_{red}$ が $\widetilde{Y}$ 上の単純正規交差因子であるものが与えられたとする．E の既約成分の組み合わせ論的情報を記述する CW-複体 (E の双対複体) のホモトピータイプを X の G-同変幾何学的な情報で決定することが問題である．問題の背景には，近年盛んに研究されている McKay 対応の背後にある同じ原理が働いていると考えられる．高次元ハッセ原理という数論的な問題がこのような幾何学的問題に関係するのは興味深い．

1　古典的類体論

有理数体 $\mathbb{Q}$ の 2 次拡大体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$，$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ について考える．これらのガロア群について同型

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{-1})/\mathbb{Q}) \cong \{\pm 1\}, \quad \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}) \cong \{\pm 1\}$$

が成り立つ．上の同型から，ふたつの体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$，$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ の数論的な違いをみることはできない．一方，$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ が円分体 $\mathbb{Q}(\zeta_4)$ (ζ_n は 1 の原始 n 乗根) であるという事実より同型

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{-1})/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times$$

が成り立つ．$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ についてもこれを円分体 $\mathbb{Q}(\zeta_8)$ に埋め込むことにより同型

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times/\{\pm 1\}$$

を得る (これらの同型は後で述べる同型 (1) の帰結である)．ここまで来るとふたつの体の数論的な違いがはっきりする．実際，これらの同型から次の事実が導かれる．

定理 1　(Fermat) p を奇素数とすると次の同値が成り立つ．

$$p = x^2 + y^2 \text{ なる } x, y \in \mathbb{Z} \text{ が存在する} \Leftrightarrow p \equiv 1 \bmod 4,$$
$$p = x^2 - 2y^2 \text{ なる } x, y \in \mathbb{Z} \text{ が存在する} \Leftrightarrow p \equiv \pm 1 \bmod 8.$$

K を有限次代数体 ($\mathbb{Q}$ の有限次拡大)，$\mathcal{O}_K$ をその整数環 ($\mathbb{Z}$ の K での整閉包) とすると，イデアル

$\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K$ は極大イデアルの積

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{e_r}$$

に分解するという事実を思い出そう．ガウスの整数環 $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ が単項イデアル整域であることから次の同値が成り立つ．

$$p = x^2 + y^2 \text{ なる } x, y \in \mathbb{Z} \text{ が存在する} \Leftrightarrow (p) = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \ \subset \ \mathbb{Z}[\sqrt{-1}].$$

ここで $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ は $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ の相違なる極大イデアルである．$p = x^2 - 2y^2$ に関しても $\mathbb{Z}[\sqrt{2}\,]$ を使って同様の言い換えができる．以上の考察から次の問題が自然に生じる．

問題 2 有限次代数体 K とガロア拡大 L/K が与えられたとき，そのガロア群 $\mathrm{Gal}(L/K)$ を極大イデアルの分解法則 (つまり $\mathcal{O}_K$ の極大イデアル $\mathfrak{p}$ にたいし，$\mathfrak{p}\mathcal{O}_L$ がどのように $\mathcal{O}_L$ の極大イデアルの積に分解するかを与える法則) がわかるように記述せよ．

例 1 $a \in \mathbb{Z}$ を平方因子を含まない整数とし，有理数体 $\mathbb{Q}$ の 2 次拡大 $L = \mathbb{Q}(\sqrt{a}\,)$ を考える．ガロア群 $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ は $\{\pm 1\}$ と同一視する．

$$n = \begin{cases} |a| & a \equiv 1 \bmod 4 \text{ のとき} \\ 4|a| & a \equiv 2, 3 \bmod 4 \text{ のとき} \end{cases}$$

とおいて，準同型 $\chi_a : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \to \{\pm 1\}$ を

$$\chi_a(m \bmod n) = \left(\prod_{\ell \text{ は } a \text{ を割る奇素数}} \left(\frac{m}{\ell} \right) \right) \theta_a(m)$$

で定義する[3)]．ここで

$$\left(\frac{m}{\ell} \right) = \begin{cases} 1 & \text{整数 } x \text{ が存在して } m \equiv x^2 \bmod \ell \text{ となる場合} \\ -1 & \text{その他の場合} \end{cases}$$

はルジャンドル記号で，$\theta_a(m)$ は以下のとおりである．

$a \equiv 1 \bmod 4$ なら $\theta_a(m) = 1$.

$a \equiv 3 \bmod 4$ なら

$$\theta_a(m) = \begin{cases} 1 & m \equiv 1 \bmod 4 \text{ の場合} \\ -1 & \text{その他の場合} \end{cases}$$

a が偶数なら

$$\theta_a(m) = \begin{cases} 1 & m \equiv 1,\ 1 - a \bmod 8 \text{ の場合} \\ -1 & \text{その他の場合} \end{cases}$$

次の定理は $\mathbb{Q}(\sqrt{a}\,)/\mathbb{Q}$ にたいする問題 2 の解答を与える ([KKS, 第 5 章定理 5.15])．

定理 2 $(p, n) = 1$ なる素数 p にたいし次の同値が成り立つ．

$$\chi_a(p) = -1 \ \Leftrightarrow \ p\mathcal{O}_L \text{ は極大イデアル}$$

$$\chi_a(p) = 1 \ \Leftrightarrow \ p\mathcal{O}_L = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \ \ (\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2 \text{ は } \mathcal{O}_L \text{ の相違なる極大イデアル})$$

定理 2 はガウスの平方剰余の相互法則の帰結である.

例 2 n を自然数として円分体 $L=\mathbb{Q}(\zeta_n)$ を考える. ここで ζ_n は 1 の原始 n 乗根である. その整数環は $\mathcal{O}_L=\mathbb{Z}[\zeta_n]$ である. 円分多項式の既約性より同型

$$c_n : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \xrightarrow{\cong} \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}) \ ; \ a \to \sigma_a \tag{1}$$

が成り立つ. ここで $\sigma_a \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q})$ は $\sigma_a(\zeta_n)=\zeta_n^a$ により定まる. 次の定理は $\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}$ にたいする問題 2 への解答を与える ([KKS, 第 5 章定理 5.7]).

定理 3 p を $(p,n)=1$ なる素数とし, f を σ_p の位数とする (同型 (1) より f は $p^f\equiv 1 \bmod n$ となる最小の自然数である). このとき $p\mathbb{Z}[\zeta_n]$ の極大イデアルへの分解は次で与えられる.

$$p\mathbb{Z}[\zeta_n]=\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_r\subset\mathbb{Z}[\zeta_n] \quad (r=[\mathbb{Q}(\zeta_n):\mathbb{Q}]/f)$$

ここで $\mathfrak{p}_1,\cdots,\mathfrak{p}_r$ は互いに異なる $\mathbb{Z}[\zeta_n]$ の極大イデアルで, その剰余体 $\mathbb{Z}[\zeta_n]/\mathfrak{p}_i$ は $\mathbb{F}_{p^f}$ に等しい.

例 1 と例 2 の関係が次で説明される ([KKS, 第 5 章命題 5.14]).

命題 1 a,n,χ_a を例 1 のとおりとすると, $\mathbb{Q}(\sqrt{a})\subset\mathbb{Q}(\zeta_n)$ で, 次の図式は可換である.

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \arrow[r, "c_n"] \arrow[d, "\chi_a"] & \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}) \arrow[d, "\text{制限}"] \\
\{\pm 1\} & \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{a})/\mathbb{Q}) \arrow[l, "\simeq"']
\end{tikzcd}$$

定理 3 を $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ の部分体にたいする同様な主張に一般化することにより, 定理 2 を上の命題を用いて示し, それから平方剰余の相互法則を導くこともできる ([KKS, 第 5 章 §5.2(f)]).

一般の有限次代数体のアーベル拡大 L/K の場合はどうであろうか? 実はそのヒントが円分体にたいする同型 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times\cong\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q})$ にある. $P_\mathbb{Q}$ を素数全体の集合とし, $\Sigma(n)\subset P_\mathbb{Q}$ を n を割る素数たちの集合とする. このとき次の完全系列が存在する.

$$\mathbb{Q}(n)^+ \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{p\in P_\mathbb{Q}-\Sigma(n)}\mathbb{Z} \xrightarrow{\rho} \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}) \to 0$$

$$\mathbb{Q}(n)^+ := \left\{ a\in\mathbb{Q}^\times \,\middle|\, a=1+\frac{nc}{b}>0,\ b,c\in\mathbb{Z},\ (b,n)=1 \right\}, \tag{2}$$

ここで ρ は p-成分が $1\in\mathbb{Z}$ の元を σ_p に写す写像で, $\delta(a)=\big(v_p(a)\big)_{p\in P_\mathbb{Q}-\Sigma(n)}$ $(a\in\mathbb{Q}(n)^+)$ である. ただし $v_p(a)$ は $a\in\mathbb{Q}^\times$ の p 進付値 (つまり p で何回割りきれるか) である.

この完全系列は同型 (1) を使って容易に示せるが, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ というわかりやすい有限アーベル群を (同型 (1) をとおして) わざわざふたつの無限群の間の準同型の余核として表していることに注目しよう. 大切なポイントは, $\sigma_p\in\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q})$ という特徴的な元が n を割らない素数 p ごとに存在する点である. 実はこのような元が一般の有限次代数体のアーベル拡大にたいしても存在する.

L/K を有限次代数体のアーベル拡大, P_K を $\mathcal{O}_K$ の極大イデアル全体の集合とする.

命題 2　$\mathfrak{p} \in P_K$ が L/K で**不分岐** (つまり $\mathfrak{p}\mathcal{O}_L$ は互いに異なる $\mathcal{O}_L$ の極大イデアルの積 $\mathfrak{p}\mathcal{O}_L = \mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_r$ に分解する) ならば次の性質を満たす $\sigma_{\mathfrak{p},L/K} \in \mathrm{Gal}(L/K)$ がただひとつ存在する.

$$\sigma_{\mathfrak{p},L/K}(x) \equiv x^q \bmod \mathfrak{P}_i \quad (\forall x \in \mathcal{O}_L,\ 1 \leqq \forall i \leqq r)$$

ここで q は有限体 $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$ の位数である．$\sigma_{\mathfrak{p},L/K}$ を $\mathfrak{p}$ におけるフロベニウス写像と呼ぶ.

注意 1　L'/K を L/K の部分拡大とすると，自然な全射 $\mathrm{Gal}(L/K) \to \mathrm{Gal}(L'/K)$ による $\sigma_{\mathfrak{p},L/K}$ の像は $\sigma_{\mathfrak{p},L'/K}$ に一致する.

以下，有限次代数体 K と P_K の有限部分集合 Σ を固定する．L/K を有限次アーベル拡大で， 全ての $\mathfrak{p} \in P_K - \Sigma$ が L/K で不分岐であるとする．命題 2 より自然な準同型

$$\rho_{L/K}: \bigoplus_{\mathfrak{p} \in P_K - \Sigma} \mathbb{Z} \to \mathrm{Gal}(L/K)\ ;\ (e_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in P_K - \Sigma} \to \prod_{\mathfrak{p} \in P_K - \Sigma} (\sigma_{\mathfrak{p},L/K})^{e_{\mathfrak{p}}} \tag{3}$$

が定義される．これにたいし，次の事実が知られている.

- $\rho_{L/K}$ は全射である (チェボタレフの密度定理).
- $\mathfrak{p} \in P_K - \Sigma$ にたいし，$f_{\mathfrak{p}}$ を $\sigma_{\mathfrak{p},L/K}$ の $\mathrm{Gal}(L/K)$ における位数とし，$r = [L:K]/f_{\mathfrak{p}}$ とおく. このとき $\mathfrak{p}\mathcal{O}_L$ の極大イデアルへの分解は

$$\mathfrak{p}\mathcal{O}_L = \mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_r \subset \mathcal{O}_L$$

で与えられる．ここで $\mathfrak{P}_1, \cdots, \mathfrak{P}_r$ は 互いに異なる $\mathcal{O}_L$ の極大イデアルで，剰余体の拡大次数について $[\mathcal{O}_L/\mathfrak{P}_i : \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}] = f_{\mathfrak{p}}$ が成り立つ.

以上より問題 2 は次に帰着される.

問題 3　$\rho_{L/K}$ の核を記述せよ．言い換えれば，フロベニウス写像 $\sigma_{\mathfrak{p},L/K} \in \mathrm{Gal}(L/K)$ たちの間の関係式をすべて決定せよ.

これに完全な解答を与えたのが高木と Artin による類体論である.

L_Σ を K のアーベル拡大 L で，Σ の外の全ての極大イデアルが不分岐なものたちの合成体とする. L_Σ は一般には K の無限次拡大であるが，注意 1 により各 $\mathfrak{p} \in P_K - \Sigma$ にたいしフロベニウス写像 $\sigma_{\mathfrak{p},L_\Sigma/K} \in \mathrm{Gal}(L_\Sigma/K)$ が定まり，(3) と同様にして準同型

$$\rho_{L_\Sigma/K}: \bigoplus_{\mathfrak{p} \in P_K - \Sigma} \mathbb{Z} \to \mathrm{Gal}(L_\Sigma/K) \tag{4}$$

が定義される．この準同型の核を記述するために記号を導入する.

ゼロでないイデアル $I \subset \mathcal{O}_K$ にたいし，I を割る $\mathfrak{p} \in P_K$ たちの集合を $|I|$ で表す．$K(I)$ を K の元 a で以下の条件を満たすもの全体とする (K の乗法群 $K^\times$ の部分群である).

- a は各 $\mathfrak{p} \in |I|$ において単元かつ $a \equiv 1 \bmod I$ をみたす: $\mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}$ を $\mathcal{O}_K$ の $\mathfrak{p}$ での局所化とすると

$$a \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in |I|} \{\alpha \in \mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}^\times \mid \alpha \equiv 1 \bmod I\mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}\}. \tag{5}$$

さらに

$$K(I)^+ = K(I) \cap K^+ \ \subset K^\times \tag{6}$$

とおく．ただし K^+ は，全ての体の埋め込み $\tau : K \hookrightarrow \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ は実数体) にたいして $\tau(a) > 0$ を満たす K の元 a たちのなす $K^\times$ の部分群である．(2) の $\mathbb{Q}(n)^+$ は $K = \mathbb{Q}$, $I = (n) \subset \mathbb{Z}$ にたいする $K(I)^+$ に一致する．このとき

$$Cl(K, I) = \mathrm{Coker}\left(K(I)^+ \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{\mathfrak{p} \in P_K - \Sigma} \mathbb{Z} \right) \tag{7}$$

とおく．ただし $v_{\mathfrak{p}}$ を $\mathfrak{p}$ から定まる K の正規付値とすると

$$\delta(a) = \big(v_{\mathfrak{p}}(a)\big)_{\mathfrak{p} \in P_K - \Sigma} \quad (a \in K(I)^+) \tag{8}$$

注意 2　$Cl(K, I)$ は有限である (イデアル類群の有限性 (ミンコウスキーの定理) から従う).

注意 3　$\mathcal{O}_K$ のイデアルの列 $I' \subset I$ にたいし自然な全射 $Cl(K, I') \to Cl(K, I)$ が導かれる.

定理 4　(高木-Artin) 準同型 (4) は位相同型[4)]

$$\varprojlim_{|I| \subset \Sigma} Cl(K, I) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Gal}(L_\Sigma / K) \tag{9}$$

を誘導する．ここで極限は $|I| \subset \Sigma$ を満たすゼロでないイデアル $I \subset \mathcal{O}_K$ 全体をわたる.

上述の定理の重要な帰結として不分岐類体論が従う．K の狭義イデアル類群を

$$Cl(K)^+ = \mathrm{Coker}\big(K^+ \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{\mathfrak{p} \in P_K} \mathbb{Z}\big) \tag{10}$$

で定義する．ただし $K^+ \subset K^\times$ は (6) において, δ は (8) において定義されたものである ((10) で K^+ の代わりに $K^\times$ としたものが K のイデアル類群 $Cl(K)$ である).

定理 5　(Hilbert-Furtwängler) H_K を K の最大不分岐アーベル拡大 (すべての $\mathcal{O}_K$ の極大イデアルが不分岐なアーベル拡大の合成体) とする．対応 $\mathfrak{p} \to \sigma_{\mathfrak{p}, H_K/K}$ は次の有限群の同型を誘導する.

$$Cl(K)^+ \cong \mathrm{Gal}(H_K / K)$$

注意 4　同型 (9) により (固定された)I に対応する L_Σ / K の部分アーベル拡大 $L_{\Sigma, I}$ を Artin 導手 (6.1 節参照) を用いて特徴づけることができる.

2　類体論の高次元化

この節で類体論の高次元化を解説する．まずスキーム論を用いた類体論の幾何学化から始めよう．K を有限次代数体，$\mathcal{O}_K$ をその整数環として，$X = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ を考える．X は 1 次元のスキームで 2 種類の点をもつ．ひとつは生成点 (これはただひとつ) で，この点の X での閉包は X 自身である．もうひとつは閉点 (X の点でそれ自身が閉集合であるもの) である．X の閉点は $\mathcal{O}_K$ の極大イデアルに対応し，X の閉点全体の集合 $X_{(0)}$ は $\mathcal{O}_K$ の極大イデアル全体の集合 P_K と同一視される．以下の説明において，X を有限体上の正則な曲線の類似と考えると理解しやすい.

X の空でない開集合 $U \subset X$ を固定しよう．U の代数的基本群のアーベル化を $\pi_1^{ab}(U)$ で表す．こ

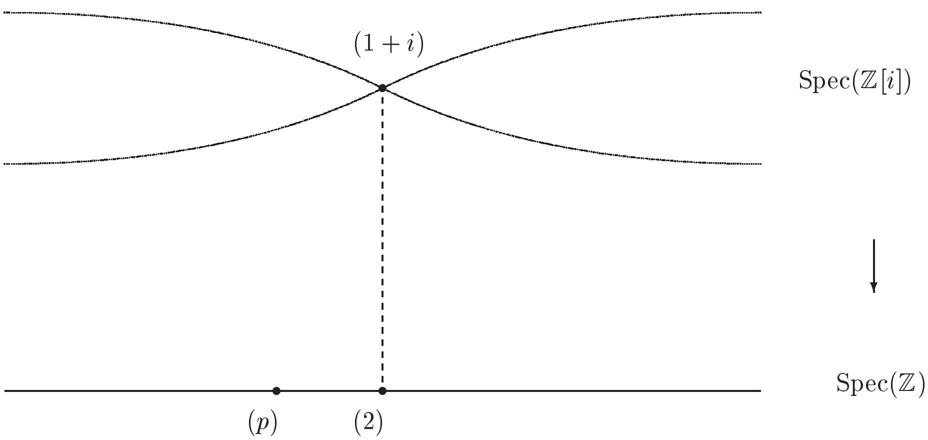
れはアーベル被覆 $V \to U$ 全体を分類するガロア群である (序章の問題 1 の前の説明を参照)．$\Sigma = X - U$ とすると，前節で定義した L_Σ を用いて自然な同一視

$$\pi_1^{ab}(U) = \mathrm{Gal}(L_\Sigma/K) \tag{11}$$

ができる．アーベル被覆の例として次の射を挙げておく．

$$f : V = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[i]) - \{(1+i)\} \to U = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) - \{(2)\}.$$

f は自然な環の準同型 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[i]$ が導くスキームの射である．$\mathbb{Z}[i]$ のイデアルとして $(2) = (1+i)^2$ なので，f は $(2) \in \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ において分岐する．



基本群を用いてフロベニウス写像 (命題 2 参照) を幾何的に構成できる．閉点 $x \in U$ を固定する．x の剰余体 $\kappa(x)$ は有限体である．その位数を q とする．埋め込み射 $x \to U$ はアーベル基本群の準同型

$$\rho_x : \pi_1^{ab}(x) \to \pi_1^{ab}(U)$$

を誘導する．$\pi_1^{ab}(x)$ は有限体 $\kappa(x)$ の絶対ガロア群 $\mathrm{Gal}(\overline{\kappa(x)}/\kappa(x))$ と同一視される．これは q 乗写像という位相的生成元をもつ．この元の ρ_x による像 $\sigma_x \in \pi_1^{ab}(U)$ が，x に対応する $\mathcal{O}_K$ の極大イデアルにおけるフロベニウス写像 (命題 2 参照) と同一視 (11) を通して一致する．

ここから話を高次元へ移そう．以下，U として数論的スキームをとる．上の議論とまったく同じ議論により閉点 $x \in U$ にたいしてフロベニウス写像 $\sigma_x \in \pi_1^{ab}(U)$ が定まる (ポイントは U の閉点の剰余体が有限体である点である)．$U_{(0)}$ を U の閉点全体の集合とし，U 上のゼロサイクルの群を

$$Z_0(U) = \bigoplus_{x \in U_{(0)}} \mathbb{Z}$$

により定義する．$U = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ なら $Z_0(U)$ は代数体 K の分数イデアル全体がなす群である．上で定義したフロベニウス写像を用いて準同型

$$\rho_U : Z_0(U) \to \pi_1^{ab}(U)\ ;\ \big(n_x\big)_{x \in U_{(0)}} \to \prod_{x \in U_{(0)}} (\sigma_x)^{n_x} \tag{12}$$

が定義される．Lang は次の定理[5] を示した ([Lan1], [Lan2], [Se3, Th.7] 参照．)．

定理 6　U が正規なら ρ_U の像は稠密である．

ここで次の問題が自然に生じる．

問題 4　正則な数論的スキーム U にたいし ρ_U の核を U に内在的な情報を用いて記述せよ．

この基本的問題にたいし加藤-斎藤 [KS2] は以下の結果を示した．U のコンパクト化 $j : U \hookrightarrow X$ を選ぶ．ここで X はコンパクト (つまり $\mathbb{Z}$ または $\mathbb{F}_p$ 上固有的) な整スキームで，j は開埋め込みである．加藤-斎藤は以下の構成を行った (詳細の説明は省く)．

- イデアル層 $I \subset \mathcal{O}_X$ にたいし "モジュラス I をもつ高次元イデール類群" が定義される：

$$C_I(X) = H^d_{Nis}(X, K_d^M(\mathcal{O}_X, I)) \quad (d = \dim(X)),$$

ここでコホモロジー群は Nisnevich 位相と呼ばれる X 上のグロタンディック位相にたいするもので，$K_d^M(\mathcal{O}_X, I)$ は相対的ミルナー K 群の層である．

- $C_I(X)$ は X の関数体をいくつもの段階にヘンゼル局所化して得られる高次元局所体のミルナー K 群を用いてイデール表示される．
- $\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/I) \subset X - U$ のとき次の自然な全射が存在する．

$$\pi_I : Z_0(U) = \bigoplus_{x \in U_{(0)}} \mathbb{Z} \twoheadrightarrow C_I(X)$$

- 準同型 ρ_U は π_I をとおして次の高次元相互写像を誘導する．

$$\Phi_U \ :\ \varprojlim_{\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/I) \subset \Sigma} C_I(X) \ \to \pi_1^{ab}(U) \quad (\Sigma = X - U)$$

定理 7　Φ_U は (ほぼ) 同型である．

加藤-斎藤の高次元類体論の欠点は，$\pi_I : Z_0(U) \to C_I(X)$ の核を記述することが困難なことである．よって定理 7 を用いて ρ_U の核を記述することは困難であり，問題 4 に完全な解答を与えたとは言い難い．以下の節ではこの点を改良する結果を紹介する。

3　高次元不分岐類体論

この節では，加藤-斎藤の高次元類体論の帰結である高次元不分岐類体論を解説する．高次元不分岐類体論は，コンパクト (つまり $\mathbb{Z}$ 上あるいは $\mathbb{F}_p$ 上固有的) で正則な数論的スキーム X のアーベル基本群 $\pi_1^{ab}(X)$ を X の 0 次元チャウ群 $\mathrm{CH}_0(X)$ を用いて記述する．$X = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ (K は有限次代数体) なら $\mathrm{CH}_0(X)$ は K のイデアル類群である．一般には $\mathrm{CH}_0(X)$ をイデアル類群の高次元化とみることもできる．体または $\mathbb{Z}$ 上有限型スキーム X にたいし，$\mathrm{CH}_0(X)$ が X 上のゼロサイクルの群を有理同値で割った群として

$$\mathrm{CH}_0(X) = \mathrm{Coker}\Big(\bigoplus_{C \in Cu(X)} k(C)^\times \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{x \in X_{(0)}} \mathbb{Z}\Big) \tag{13}$$

により定義される．ここで $Cu(X)$ は X 上の曲線 (X の閉部分スキームで整 (integral) かつ 1 次元なるもの) を正規化 (normalization) したもの全体の集合である．$C \in Cu(X)$ にたいし $k(C)$ はその関数体を表す (X が数論的スキームなら $k(C)$ は有限次代数体あるいは有限体上の一変数関数体である)．準同型

$$\delta : k(C)^\times \to Z_0(X) = \bigoplus_{x \in X_{(0)}} \mathbb{Z}$$

は合成写像 $k(C)^\times \xrightarrow{\delta_C} Z_0(C) \xrightarrow{\phi_{C*}} Z_0(X)$ である．ここで δ_C は正則な 1 次元スキーム C にたいする因子写像 ((8) と同様に定義される) で，ϕ_{C*} は自然な射 $\phi_C : C \to X$ が誘導する準同型である．

X が数論的スキーム (つまり $\mathbb{Z}$ 上有限型) である場合には (13) を少々修正して

$$\mathrm{CH}_0(X)^+ = \mathrm{Coker}\Big(\bigoplus_{C \in Cu(X)} k(C)^+ \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{x \in X_{(0)}} \mathbb{Z} \Big) \tag{14}$$

とおく．ここで $k(C)^+$ は有限次代数体ならば (6) で定義される $k(C)^\times$ の部分群で，有限体上の一変数関数体ならば $k(C)^\times$ である．$X = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ (K は有限次代数体) の場合，$\mathrm{CH}_0(X)^+$ は (10) で定義された K の狭義イデアル類群である．一般に全射準同型 $\mathrm{CH}_0(X)^+ \to \mathrm{CH}_0(X)$ が存在し，その核は有限アーベル群ですべての元の位数が 2 以下である．

X が体 k 上固有的な多様体であるとき，$Z_0(X)$ 上の次数写像

$$Z_0(X) = \bigoplus_{x \in X_{(0)}} \mathbb{Z} \ \to \ \mathbb{Z}\ ;\ (n_x)_{x \in X_{(0)}} \to \sum_{x \in X_{(0)}} n_x [k(x) : k] \quad (k(x) \text{ は } x \text{ の剰余体}) \tag{15}$$

はチャウ群上の次数写像 $\deg : \mathrm{CH}_0(X) \to \mathbb{Z}$ を誘導する．$\mathrm{Ker}(\deg) = \mathrm{CH}_0(X)^0 \subset \mathrm{CH}_0(X)$ とする．

次は定理 5 の高次元化である ([B1], [KS1], [Sa1], [CTSS])．

定理 8　X をコンパクト ($\mathbb{Z}$ あるいは $\mathbb{F}_p$ 上固有的) で正則な数論的スキームとする．

X の関数体の標数がゼロなら準同型 (12) $\rho_X : Z_0(X) \to \pi_1^{ab}(X)$ は次の有限群の同型を誘導する．

$$\mathrm{CH}_0(X)^+ \xrightarrow{\cong} \pi_1^{ab}(X).$$

X が有限体 k 上の多様体なら ρ_X は次の有限群の同型を誘導する．

$$\mathrm{CH}_0(X)^0 \xrightarrow{\cong} \pi_1^{ab}(X)^0.$$

ここで $\pi_1^{ab}(X)^0$ は射 $X \to \mathrm{Spec}(k)$ が誘導する準同型 $\pi_1^{ab}(X) \to \pi_1^{ab}(\mathrm{Spec}(k))$ の核である．

4　高次元順分岐類体論

この節では高次元不分岐類体論を順分岐な場合に拡張する Wiesend/Kerz-Schmidt の結果[6)] を紹介する (定理 9)．そのために数論的スキーム U 上の被覆 (有限エタール射) が順分岐であることを定義する必要がある．この定義にはいくつか異なるものが存在する ([KeSc2] 参照)．粗く言えば，U 上の被覆を U のコンパクト化上の有限射に延長したとき “境界での分岐が穏やか” であることを意味する．もし良いコンパクト化[7)] $U \hookrightarrow X$ が存在すれば [SGA1, XIII 2.1] の定義が自然である．一般にはそのようなコンパクト化の存在は保証されていないのでここでは U 上の曲線を使った定義を採用す

る．

U を $\mathbb{Z}$ または完全体 k 上有限型で正則なスキームとし，$f: V \to U$ を被覆とする．最初に $\dim(U) = 1$ とする．$j_U: U \hookrightarrow \overline{U}$ と $j_V: V \hookrightarrow \overline{V}$ を正則なコンパクト化[8)]とする．f は有限射 $\overline{f}: \overline{V} \to \overline{U}$ を誘導する．f が順分岐とは，各点 $y \in \overline{V} - V$ での $\overline{f}$ の分岐指数が y の剰余体の標数で割れないことである．次に一般の場合を扱う．$Cu(U)$ を U 上の曲線を正規化したもの全体の集合とする．f が順分岐とは，各 $C \in Cu(U)$ にたいし誘導される射 $V \times_U C \to C$ が上の意味で順分岐であることである．順分岐でない被覆を**暴分岐 (wildly ramified)** な被覆と言う．U 上の順分岐アーベル被覆全体を分類する $\pi_1^{ab}(U)$ の商を $\pi_1^{t,ab}(U)$ で表す．

次に $\pi_1^{t,ab}(U)$ を記述する群を導入する．(13) における 0 次元チャウ群の定義を修正して

$$\mathcal{C}_U^t = \mathrm{Coker}\Big(\bigoplus_{C \in Cu(U)} k(C)_t \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{x \in U_{(0)}} \mathbb{Z}\Big). \tag{16}$$

とおく．ここで $k(C)_t$ は以下で定義される $k(C)^\times$ の部分群である．$C \in Cu(U)$ にたいし $j_C: C \hookrightarrow \overline{C}$ をその正則なコンパクト化とし

$$k(C)_t = \bigcap_{y \in \overline{C} - C} \{\alpha \in \mathcal{O}_{\overline{C},y}^\times \mid \alpha \equiv 1 \bmod \mathfrak{m}_y\} \tag{17}$$

とおく ((5) 参照)．ここで $\mathcal{O}_{\overline{C},y}$ は $\overline{C}$ の y における局所環，$\mathfrak{m}_y$ はその極大イデアルである．

U が $\mathbb{Z}$ 上有限型な場合には (14) と同様にして，(16) において $k(C)_t$ を $k(C)_t \cap k(C)^+$ ((6) 参照) に置き換えて定義したものを $\mathcal{C}_U^{t,+}$ で表す．U が体 k 上の場合は $Z_0(U)$ 上の次数写像 ((15) 参照) が $\deg: \mathcal{C}_U^t \to \mathbb{Z}$ を誘導する．$\mathrm{Ker}(\deg) = \mathcal{C}_U^{t,0} \subset \mathcal{C}_U^t$ とする．また射 $U \to \mathrm{Spec}(k)$ が誘導する準同型 $\pi_1^{t,ab}(U) \to \pi_1^{ab}(\mathrm{Spec}(k))$ の核を $\pi_1^{t,ab}(U)^0$ と表す．

定理 9 ([KeSc1], [W]) U を正則な数論的スキームとする．

U の関数体の標数がゼロなら準同型 (12) は有限群の同型 $\mathcal{C}_U^{t,+} \xrightarrow{\cong} \pi_1^{t,ab}(U)$ を誘導する．

U が有限体上なら準同型 (12) は有限群の同型 $\mathcal{C}_U^{t,0} \xrightarrow{\cong} \pi_1^{t,ab}(U)^0$ を誘導する．

5 有限体上の多様体の暴分岐を許す類体論

この節では，Kerz-斎藤 [KeS3] による暴分岐を許す有限体上の高次元類体論の主定理を述べる (定理 10)．結果は定理 9 の有限体上の場合を拡張するものである．

一般に U を体 k 上の正則な多様体とする．U のコンパクト化 $j: U \subset X$ を固定する．ここで X は k 上固有的で正規な多様体，j は開埋め込みで X 上の有効カルティエ因子 D にたいし $X \setminus U = |D|$ ($|D|$ は D の台) となるものである[9)]．(13) で定義された $\mathrm{CH}_0(X)$ を一般化する “D をモヂュラスにもつ X の 0 次元チャウ群”を

$$\mathrm{CH}_0(X, D) = \mathrm{Coker}\Big(\bigoplus_{C \in Cu(U)} k(C)_D \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{x \in U_{(0)}} \mathbb{Z}\Big), \tag{18}$$

により定義する．ここで $U_{(0)}$ は U の閉点全体の集合，$k(C)_D$ は以下で定義される $k(C)^\times$ の部分群である．$C \in Cu(U)$ にたいし $C \hookrightarrow \overline{C}$ を k 上の正則なコンパクト化とすると自然な射 $C \to U$ はコンパクト化上の射 $\phi_{\overline{C}}: \overline{C} \to X$ に延長される．$I_{\overline{C}}(D) \subset \mathcal{O}_{\overline{C}}$ を D のイデアル層 $I_D \subset \mathcal{O}_X$ の $\phi_{\overline{C}}$ に

よる引き戻しとする．このとき

$$k(C)_D = \bigcap_{y\in\overline{C}-C} \{\alpha \in \mathcal{O}^{\times}_{\overline{C},y} \mid \alpha \equiv 1 \bmod I_{\overline{C}}(D)\mathcal{O}_{\overline{C},y}\}$$

とおく ((17) 参照)．$\dim(U) = 1$ の場合の (18) は (7) の類似である．$Z_0(U)$ 上の次数写像 ((15) 参照) が $\deg : \mathrm{CH}_0(X,D) \to \mathbb{Z}$ を誘導する．$\mathrm{Ker}(\deg) = \mathrm{CH}_0(X,D)^0 \subset \mathrm{CH}_0(X,D)$ とする．また射 $U \to \mathrm{Spec}(k)$ が誘導する準同型 $\pi_1^{ab}(U) \to \pi_1^{ab}(\mathrm{Spec}(k))$ の核を $\pi_1^{ab}(U)^0$ とおく．

定理 10 k は有限体で $\mathrm{ch}(k) \neq 2$ とする．$\mathrm{CH}_0(X,D)^0$ は有限群で (12) の準同型 ρ_U は位相同型[10)]

$$\Phi_U : \varprojlim_{D} \mathrm{CH}_0(X,D)^0 \xrightarrow{\cong} \pi_1^{ab}(U)^0$$

を誘導する．ここで極限は $X \setminus U = |D|$ となる X 上の有効カルティエ因子 D 全体をわたる．

6.2 節で，$X \setminus U = |D|$ となる X 上の有効カルティエ因子 D にたいし分岐が D で制限されたアーベル基本群 $\pi_1^{ab}(X,D)$ を $\pi_1^{ab}(U)$ の商群として定義する．これを用いて定理 10 が精密化される．

定理 11 ρ_U は準同型 $\Phi_{X,D} : \mathrm{CH}_0(X,D) \to \pi_1^{ab}(X,D)$ を誘導する．$\mathrm{ch}(k) \neq 2$ ならば，これは有限群の同型 $\mathrm{CH}_0(X,D)^0 \xrightarrow{\cong} \pi_1^{ab}(X,D)^0$ を導く．

注意 5 定理 11 の証明では加藤-松田 ([K3], [Ma]) による高次元分岐理論が本質的に用いられる．実は U の関数体の標数が 0 の場合には定理と同様な主張が [KeSc1] の結果から (高次元分岐理論を用いることなく) 従う[11)]．この場合には，U のアーベル拡大における暴分岐が有限次代数体 (U の関数体内での $\mathbb{Q}$ の代数閉包) のアーベル拡大で相殺されるという事実より高次元の暴分岐を扱う必要がないのである．奇妙に聞こえるかもしれないが，高次元類体論においては有限体上の関数体の方が有限次代数体上の関数体よりも難しいといえる．

6 Artin 導手と定理 11 の証明のアイデア

6.1 Artin 導手

R を完備離散付値環，K をその商体，k をその剰余体とし，$G = G_K$ を K の絶対ガロア群とする．分岐理論は G の構造を解析する理論である．古典的分岐理論 ([Se1]) は k が完全体の場合を扱う．この論説では k が完全体でない場合を扱う理論を高次元分岐理論と呼ぶ．これは正標数の体上の多様体の有限被覆の分岐を扱うために必要となる理論である．以下 k は完全体であると仮定する．G の表現 ρ [12)] にたいしその Artin 導手と呼ばれる ρ の分岐の深さを測る量 $Art(\rho)$ (非負整数) が定義される ([Se1, Ch. VI])．ρ が次数 1 の指標で $Art(\rho) > 0$ の場合には

$$Art(\rho) = 1 + \max\{\nu \mid \rho(G^{\nu}) \neq \{1\}\}.$$

ここで $G^{\nu} \subset G$ $(\nu \in \mathbb{Q}_{\geq 0})$ は G の高次分岐群である．

次に Artin 導手を大域化する．X を完全体 k 上射影的で正則な曲線とする．K を X の関数体としてその分離閉包 $\overline{K}$ を固定し，$\overline{\eta} = \mathrm{Spec}(\overline{K})$ とする．$U \subset X$ を空でない開集合とし，$\pi_1(U) = \pi_1(U,\overline{\eta})$ を代数的基本群とする．各閉点 $x \in X$ にたいし K_x を K の x での完備化とし，その分離閉包 $\overline{K_x}$ と体の埋め込み $\overline{K} \hookrightarrow \overline{K_x}$ を固定すると準同型

$$\iota_x : \mathrm{Gal}(\overline{K_x}/K_x) \to \pi_1(U)$$

が誘導される．このとき $\pi_1(U)$ の表現 ρ の Artin 導手が X 上の有効カルティエ因子として

$$Art(\rho) = \sum_{x \in X-U} Art(\rho_x)[x] \tag{19}$$

により定義され，$\overline{K_x}$ や $\overline{K} \hookrightarrow \overline{K_x}$ の取り方に依存しない．ここで ρ_x は，ι_x により ρ から誘導される $\mathrm{Gal}(\overline{K_x}/K_x)$ の表現である．

6.2 分岐が制限された基本群

U を完全体 k 上の正則な多様体とする．U のコンパクト化 $j : U \subset X$ を固定する．ここで X は k 上固有的で正規な多様体，j は開埋め込みで X 上の有効カルティエ因子 D にたいし $X \setminus U = |D|$ となるものである．“分岐が D で制限されたアーベル基本群” $\pi_1^{ab}(X, D)$ を $\pi_1^{ab}(U)$ の商として定義する．$H^1(U)$ を連続[13] 準同型 $\pi_1^{ab}(U) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 全体のなす群とする．$C \in Cu(U)$ にたいし $C \hookrightarrow \overline{C}$ を k 上の正則なコンパクト化とすると自然な射 $\phi_C : C \to U$ はコンパクト化上の射 $\phi_{\overline{C}} : \overline{C} \to X$ に延長される．$\chi \in H^1(U)$ にたいし $\chi_C \in H^1(C)$ を，$\pi_1^{ab}(C) \xrightarrow{\phi_{C*}} \pi_1^{ab}(U)$ による χ の引き戻しとする．条件

$$Art(\chi_C) \le \phi_{\overline{C}}^* D \quad (\text{左辺の定義については (19) を参照}) \tag{20}$$

が全ての $C \in Cu(U)$ にたいし成り立つとき $Art(\chi) \le D$ と表す．ここで $\phi_{\overline{C}}^* D$ はカルティエ因子 D の $\phi_{\overline{C}}$ による引き戻しである．このとき

$$\mathrm{fil}_D H^1(U) = \{\chi \in H^1(U) \mid Art(\chi) \le D\}$$

とし，$\pi_1^{ab}(X, D) = \mathrm{Hom}(\mathrm{fil}_D H^1(U), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ と定義する ($\pi_1^{ab}(U) = \mathrm{Hom}(H^1(U), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ に注意)．

6.3 定理 11 の証明のアイデア

Step 1 Wiesend[W] の結果と de Jong の alteration[dJ] を用いて X が k 上射影的滑らかで，D の台 $C := |D|$ が X 上の単純正規交差因子の場合に帰着させる．

Step 2 $D = C$(つまり D が被約) の場合を，定理 9 の証明の議論を用いて示す (つまりこの場合は順分岐類体論を扱っているのである)．

Step 3 次の $\pi_1^{ab}(X, D)$ にたいする Lefschetz 型定理により $\dim(X) = 2$ の場合に帰着させる．

定理 12 ([KeS4]) $\dim(X) > 2$ なら X の十分豊富な超曲面切断 $Y \subset X$ にたいし次が成り立つ．

$$\pi_1^{ab}(Y, D \cap Y) \cong \pi_1^{ab}(X, D).$$

Step 4 D の成分の重複度に関する帰納法を用いて，$D = C$ の場合から D が一般の場合を導く．**Step 1** と **Step 3** により X は射影的で正則な曲面で $C := |D|$ は X 上の単純正規交差因子としてよい．ここで $D' = D - C$(つまり D の各成分の重複度を 1 減らしたカルティエ因子) とおく．証明の鍵は次の完全系列の可換図式の構成である[14]．以下，アーベル群 M にたいし $M^\vee = \mathrm{Hom}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ と表す．

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{CH}_0(X,D')^\vee \arrow[r] & \mathrm{CH}_0(X,D)^\vee \arrow[r, "\psi"] & H^0(C,\Omega^1_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_X(D+\Xi)_{|C}) \\
0 \arrow[r] & \mathrm{fil}_{D'}H^1(U) \arrow[r] \arrow[u, "\Phi^\vee_{X,D'}"] & \mathrm{fil}_D H^1(U) \arrow[r, "rArt"] \arrow[u, "\Phi^\vee_{X,D}"] & H^0(C,\Omega^1_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_X(D)_{|C}) \arrow[u]
\end{tikzcd}
\tag{21}
$$

$\Phi^\vee_{X,D}$ は定理 11 の $\Phi_{X,D}$ の双対準同型で，Ω^1_X は X 上の微分形式の層である．準同型 $rArt$ は高次元分岐理論 ([K3], [Ma]) により構成された "精密化された Artin 導手"で，下の系列は完全である．[KeS3] において "サイクル理論的な $rArt$ の持ち上げ"と見られる準同型 ψ が構成され上の系列の完全性が示された (Ξ は補助的に取られた X 上の有効カルティエ因子で D に依存せず C の成分を含まない．ψ の構成は非常に技術的でここでは説明をしない).

7 有限体上の多様体の類体論の非アーベル化：予想と展望

この節では有限体上の多様体の類体論の非アーベル化ともいえる Deligne 予想を解説する．

U を有限体 $k=\mathbb{F}_q$ 上の正則な多様体とする．K を U の関数体とし，その分離閉包 $\overline{K}$ を固定し $\overline{\eta}=\mathrm{Spec}(\overline{K})$ とする．代数的基本群 $\pi_1(U)=\pi_1(U,\overline{\eta})$ を理解することが基本的問題である．このために整数 $r>0$ と素数 $\ell\neq \mathrm{ch}(k)$ を固定し以下の集合を考える．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_r(U) &:= \{\rho:\pi_1(U)\to \mathrm{GL}_r(\overline{\mathbb{Q}_\ell}) \mid \text{連続表現}\}/\underset{s.s.}{\sim} \\
&= \{\text{階数 } r \text{ の } U \text{ 上滑らかな } \ell\text{-進層}\}/\underset{s.s.}{\sim}
\end{aligned}
$$

ここで $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ は ℓ-進体 $\mathbb{Q}_\ell$ の代数閉包で，$\underset{s.s.}{\sim}$ は 'up to semi-simplification' を意味する．U 上滑らかな ℓ-進層 (smooth $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-sheaf) などの定義や等号の説明は省くが，位相空間の基本群の表現と局所系の対応の数論的類似として理解できる．

U が 1 次元 (つまり曲線) の場合，$\mathcal{S}_r(U)$ は Lafforgue[Laf] が完成した Langlands 対応により，$\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_K)$ ($\mathbb{A}_K$ は K のアデール環) の保型表現により理解される．そこで次の問題を考える．

問題 5 $\mathcal{S}_r(U)$ を理解する問題を 1 次元の場合に帰着する方法はあるか？

このために骸骨層 (skeleton sheaf) を導入する．

定義 1 U 上の曲線の正規化上の滑らかな ℓ-進層たちの系 $\left(V_C\right)_{C\in Cu(U)}$ ($V_C\in\mathcal{S}_r(C)$) であって，任意の異なる $C_1,C_2\in Cu(U)$ と点 $x\in C_1\times_U C_2$ にたいし (x は有限体のスペクトラムである)

$$(V_{C_1})_{|x}\sim (V_{C_2})_{|x}$$

を満たすものを U 上の骸骨層と呼ぶ．ここで $\sim$ は，x のフロベニウスの両辺における作用の固有多項式たちが等しいことを意味する．U 上の骸骨層全体の集合を $\mathcal{S}k_r(U)$ で表す．

U 上の ℓ-進層を U 上の曲線の正規化に制限することで写像

$$\tau_U:\mathcal{S}_r(U)\to\mathcal{S}k_r(U)$$

が生ずる．U の閉点におけるフロベニウス写像たちが $\pi_1(U)$ の稠密な部分群を生成するという事実 (定理 6 参照) より τ_U は単射であることがわかる．よって問題 5 は次の問題に言い換えられる．

問題 6　τ_U の像を記述せよ (つまり U 上の骸骨層がいつ U 上の ℓ-進層に貼り合うかを決定せよ).

5 節と同じように，U のコンパクト化 $j: U \subset X$ を固定する (X は k 上固有的正規な多様体，j は開埋め込みで X 上の有効カルティエ因子 D にたいし $X \setminus U = |D|$ となるもの).

U 上の骸骨層 $V = \big(V_C\big)_{C \in Cu(U)}$ にたいし，$\rho_C: \pi_1(C) \to \mathrm{GL}_r(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$ を $V_C \in \mathcal{S}_r(C)$ に対応する ℓ-進表現とする．$C \hookrightarrow \overline{C}$ を k 上の正則なコンパクト化とし，$\phi_{\overline{C}}: \overline{C} \to X$ を誘導される射とする ((20) 参照)．すべての $C \in Cu(U)$ にたいし $\overline{C}$ 上のカルティエ因子の不等式

$$Art(\rho_C) \le \phi_{\overline{C}}^* D \quad (\text{左辺の定義については (19) を参照})$$

が成り立つような骸骨層全体の集合を $\mathcal{S}k_r(X, D)$ で表す.

予想 1　(Deligne) D が X 上の有効カルティエ因子で $|D| = X - U$ なるもの全体をわたるとき

$$\mathrm{Image}(\tau_U) = \bigcup_D \mathcal{S}k_r(X, D) \ \subset \mathcal{S}k_r(U).$$

Esnault-Kerz [EK, Prop. 3.9] により左辺が右辺に含まれることが示されている．また数論幾何と位相幾何の興味深い類似性が観察されている．次の図は有限体上の多様体と 0-cell が 1 点のみであるような CW-複体の比較である.

多様体 $U/\mathbb{F}_q$	滑らかな ℓ-進層	$\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$	$U_{(0)}$ (閉点)	$Cu(U)$ (曲線)
CW-複体 U ($U_{\le 0} = \{*\}$)	局所系	S^1	$U_{\le 1}$ (1-skeletons)	2-cells of U

ここで CW-複体 U にたいし $U_{\le i}$ は U の i-skeleton を表す．$\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$ が 1-sphere S^1 の類似物であることは，$\pi_1(\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)) \cong \widehat{\mathbb{Z}}$ と $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ という事実による[15)]．これから Deligne 予想が，“CW-複体 U の基本群は $U_{\le 2}$ の基本群と同型である”というよく知られた事実の数論的類似とみられる.

有限体上の曲線の類体論により $r = 1$ のとき $Sk_r(X, D)$ は $\mathrm{CH}_0(X, D)^\vee$ ((21) 参照) と自然に同一視される．よって定理 10 は次の定理に同値である．つまり Deligne 予想は有限体上の高次元類体論の非アーベル化と考えることができるのである.

定理 13　(Kerz-Saito) $\mathrm{ch}(\mathbb{F}_q) \ne 2$ かつ $r = 1$ の場合に Deligne 予想は正しい.

Drinfeld([Dr]) は，D が被約な場合に $\mathcal{S}k_r(X, D)$ が τ_U の像に入ることを示した[16)]．予想の別の根拠として $\mathcal{S}k_r(X, D)$ の有限性定理を紹介する ([EK] 参照).

$\mathcal{S}_1(\mathbb{F}_q) = \mathrm{Hom}_{cont}(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_q}/\mathbb{F}_q), \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times)$ の $\mathcal{S}k_r(X, D)$ への作用を

$$\mathcal{S}_1(\mathbb{F}_q) \times \mathcal{S}k_r(X, D) \to \mathcal{S}k_r(X, D)\ ;\ (\chi, (V_C)_{C \in Cu(U)}) \to (V_C \otimes \chi)_{C \in Cu(U)}$$

で定義する．$\mathcal{S}k_r(X, D)_{irr}$ を $\mathcal{S}k_r(X, D)$ の既約な元からなる部分集合とする.

定理 14　(Deligne) $\mathcal{S}k_r(X, D)_{irr}/\mathcal{S}_1(\mathbb{F}_q)$ は有限集合である.

定理 10 における $\mathrm{CH}_0(X, D)^0$ の有限性は，定理 14 の $r = 1$ の場合の別証明を与えている.

Deligne 予想の解決には図式 (21) の非アーベル化が鍵になると考えられる．図式の下の系列の非アーベル化は Abbes-斎藤毅 ([AS], [SaT]) が構成している (と解釈できる)．$\mathrm{CH}_0(X, D)^\vee$ を $\mathcal{S}k_r(X, D)$ に置き換えて上の系列を非アーベル化することが期待されるが未解決である.

8 高次元ハッセ原理

近年様々なハッセ原理 (局所大域原理) が研究されているが最も基本的なのは次の定理であろう．

定理 15 (Hasse-Minkowski) 有理数係数の n 変数 2 次形式

$$a_1X_1^2+\cdots+a_nX_n^2=0 \quad (a_1,\cdots,a_n\in\mathbb{Q})$$

が $\mathbb{Q}$ において非自明な解をもつための必要十分条件は，それが実数体 $\mathbb{R}$ およびすべての素数 p にたいする p 進体 $\mathbb{Q}_p$ において非自明な解をもつことである．

この定理は $n=3$ の場合が最も本質的だがこれを一般化したのが大域体 (有限次代数体あるいは有限体上の一変数関数体) 上の中心的単純環[17) にたいするハッセ原理である．

定理 16 (Brauer-Hasse-Noether) K を大域体，$\overline{P}_K$ を K の素点 (K の付値の同値類) 全体の集合，K_v を K の $v\in\overline{P}_K$ による完備化とする．K 上の中心的単純環 A にたいし次の同値が成り立つ．

$$A\cong M_n(K)\Leftrightarrow A\otimes_K K_v\cong M_n(K_v) \quad (\forall v\in\overline{P}_K) \tag{22}$$

ここで $M_n(L)$ は L 上の n 次正方行列環，$\cong$ は K 上または K_v 上の多元環としての同型を表す．

定理 16 は古典的類体論において重要な役割を果たす．加藤和也 [K2] は定理 16 を高次元化する予想を提出した．これを説明するためにまず定理 16 をコホモロジー論的に再解釈する．$X=\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ (K は有限次代数体)，あるいは X は有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の射影的で正則な曲線で K をその関数体とする．話を簡単にするために $X(\mathbb{R})=\emptyset$，つまり体の埋め込み $K\hookrightarrow\mathbb{R}$ は存在しないとする (この仮定の下では (22) において $\overline{P}_K$ を K の有限素点全体の集合に置き換えても構わないことに注意する)．このとき定理 16 は本質的には制限写像

$$Br(K)\to\bigoplus_{x\in X_{(0)}}Br(K_x)$$

の単射性を主張する[18)．ここで $Br(L)$ は体 L のブラウアー群 (L 上の中心的単純環の同値類の集合にテンソル積により群構造を与えたもの)，$X_{(0)}$ は X の閉点全体の集合 (K の有限素点全体の集合と同一視される)，K_x は K の $x\in X_{(0)}$ での完備化である．一方，整数 $n>0$ と体 L にたいし自然な同型

$$H^2(L,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1))\cong Br(L)[n]$$

が成り立つ．ここで右辺は $Br(L)$ の n ねじれ部分群 (n 倍して消える元全体)，左辺は L のガロアコホモロジー (L の絶対ガロア群の群コホモロジー) でその係数加群 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1)$ は，$(\mathrm{ch}(L),n)=1$ の場合には (L の分離閉包内の) 1 の n 乗根全体の群 μ_n を表す (そうでない場合の説明は省略する)．さらに $x\in X_{(0)}$ にたいし境界同型

$$\partial_x: H^2(K_x,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1))\cong H^1(x,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

が存在する．ここで右辺は x の剰余体 $\kappa(x)$ の (自明なガロア作用をもつ)$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ を係数とするガロアコホモロジーである．したがって定理 16 の主張は次の準同型

$$H^2(K,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1)) \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{x\in X_{(0)}} H^1(x,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \tag{23}$$

の単射性に同値である[19)]．ここで ∂ は ∂_x $(x \in X_{(0)})$ から誘導される準同型である．

加藤和也 [K2] は (23) を高次元化する複体を定義した．数論的スキーム X にたいし次のアーベル群の複体 $KC_\bullet(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ (**加藤複体**と呼ばれる) が定義される．

$$\cdots \to \bigoplus_{x\in X_{(a)}} H^{a+1}(x,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(a)) \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{x\in X_{(a-1)}} H^{a}(x,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(a-1)) \xrightarrow{\partial} \cdots$$
$$\cdots \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{x\in X_{(1)}} H^2(x,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1)) \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{x\in X_{(0)}} H^1(x,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

ここで $X_{(a)} = \{x \in X \mid \dim\overline{\{x\}} = a\}$ [20)] である．$H^*(x,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(a))$ は x の剰余体 $\kappa(x)$ のガロアコホモロジーでその係数 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(a)$ は，$(\mathrm{ch}(K),n)=1$ の場合には $\mu_n^{\otimes a}$ (μ_n の自分自身との a 回テンソル積) である．$\bigoplus_{x\in X_{(a)}}$ の項が次数 a に置かれている．

$\dim(X)=1$ の場合，つまり $X=\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ (K は有限次代数体) あるいは X が有限体上射影的で正則な曲線の場合には $KC_\bullet(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ は (23) に一致する．よって定理 16 は $KC_\bullet(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ の次数 1 でのホモロジー群 $H_1\bigl(KC_\bullet(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\bigr)$ の消滅に言い換えられる．

数論的スキーム X にたいし，**加藤ホモロジー**を

$$KH_a(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = H_a\bigl(KC_\bullet(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\bigr) \quad (a \geqq 0) \tag{24}$$

で定義する．加藤ホモロジーは X の数論的性質を反映する重要な不変量である．定理 16 の高次元化が加藤ホモロジーを用いて次のように定式化される．

予想 2 (加藤 [K2]) X を有限体上固有的で正則な多様体，あるいは有限次代数体の整数環上固有的平坦で正則なスキームとする．$X(\mathbb{R})=\emptyset$ または $(n,2)=1$ を仮定する[21)]．このとき

$$KH_a(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0 \quad (\forall a > 0).$$

ちなみに加藤複体 $KC_\bullet(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ に現れる $H^{a+1}(x,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(a))$ は $a \geqq 1$ なら無限群で，次数 a の項は無限群の無限直和となる．このように大きな群を各項に持つ複体のホモロジーが消滅することは注目に値する．X が有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の場合には次の結果が示されている．

定理 17 ([KeS1]) X が $\mathbb{F}_q$ 上の固有的で正則な多様体とする．$(\mathrm{ch}(\mathbb{F}_q),n)=1$ なら

$$KH_a(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0 \quad (\forall a > 0).$$

n が $\mathrm{ch}(\mathbb{F}_q)$ と互いに素を仮定しない場合, あるいは X が整数環上の場合にも予想 2 についていくつかの部分的な結果が知られている．これを簡単に紹介する ([Sa3] と [Sa2] にさらに詳しい解説がある)．$\dim(X)=1$ の場合の予想 2 は定理 16 である．加藤 [K2] は高次元類体論を用いて $\dim(X)=2$ の場合に予想 2 を完全に解決した．さらに加藤ホモロジーの次数 3 以下での消滅が Colliot-Thélène[CT], 諏訪 [Sw]，Jannsen-斎藤 [JS1] により示された．Jannsen[J] と Jannsen-斎藤 [JS2] は，Weil 予想 (Deligne の定理 [D]) を用いることにより，X が有限体上の場合の予想 2 にたいする一般的なアプ

ローチを提出し, 特異点の解消を仮定しそれを示した. 定理 17 は, [JS2] の証明法を改良し特異点の解消を Gabber-de Jong の alteration([ILO] 参照) に置き換えることにより証明される. 斎藤-佐藤 [SS] は局所体の整数環上の有限型スキームにたいする予想 2 の変種を考察し, 局所体上の多様体の 0 次元チャウ群への応用を与えた. Geisser[G1] は有限体上の多様体にたいし整数係数の加藤ホモロジーを定義し, 予想 2 の類似を研究している.

9 高次元類体論の高次化

定理 17 の応用として高次元類体論をモチフィックコホモロジー理論を用いて一般化 (高次化) することを解説する. Schmidt-Spiess[ScSp] と Schmidt[Sc] は, 4 節で解説した高次元順分岐類体論のモチフィックコホモロジーによる解釈を与えた. ここでは有限体上の場合に絞って解説する.

U を有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の正則な多様体とする. このとき自然な同型

$$\mathcal{C}_U^t \cong H_0^S(U,\mathbb{Z}) \tag{25}$$

が成り立つ. ここで左辺は (16) で, 右辺は U の次数 0 の **Suslin ホモロジー**である. 一般にすべての自然数 $i \geqq 0$ にたいし, 次数 i の Suslin ホモロジー $H_i^S(U,\mathbb{Z})$ が定義される ([SV1] 参照). Suslin ホモロジーや以下に登場する Bloch の高次チャウ群 ([B2]) は, 近年活発な研究がおこなわれているモチフィック (コ) ホモロジーの一種であり, 代数的サイクルを用いて定義される (後で定義の簡単な復習をする. [G3] に優れた解説がある). 定理 9 と (25) より, $\mathrm{ch}(\mathbb{F}_q)$ と互いに素な任意の自然数 n にたいし U の有限係数 0 次 Suslin ホモロジーとアーベル基本群との間の自然な同型

$$H_0^S(U,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \pi_1^{ab}(U)/n \tag{26}$$

が成り立つ. 次の定理はこれを高い次数に一般化するものである ([KeS1, Th.9.3], [G2, Th.8.2], [KelS] を参照).

定理 18 U を有限体 k 上の正則な多様体とし, n を $\mathrm{ch}(k)$ と素な自然数とする. すべての自然数 i にたいし次の自然な同型が存在する

$$H_i^S(U,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong H_{\text{ét}}^{i+1}(U,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* := \mathrm{Hom}\big(H_{\text{ét}}^{i+1}(U,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}),\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\big) \tag{27}$$

ここで右辺はエタールコホモロジー $H_{\text{ét}}^{i+1}(U,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ の双対群である.

自然な同型 $H_{\text{ét}}^1(U,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \cong \pi_1^{ab}(U)/n$ をとおして, 定理 18 の $i=0$ の場合は (26) に同値である. 定理 18 は, 代数的サイクルを用いて定義される幾何的対象である Suslin ホモロジーをエタールコホモロジーというガロア群の指標群の一般化に結びつけるものである. 定理の証明の鍵となるのは, 加藤ホモロジーがモチフィックコホモロジーとエタールコホモロジーの間のギャップを埋めるという事実である (以下の補題 1 参照).

注意 6 $n = p := \mathrm{ch}(k)$ にたいしては同型 (27) は成り立たない. たとえば $i=0$ の場合に右辺は $\pi_1^{ab}(U)/p$ であるが, 左辺は定理 10 におけるモヂュラス付きの 0 次元チャウ群よりはるかに小さい群である. また Suslin ホモロジーはホモトピー不変性 $H_i^S(U,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \cong H_i^S(U\times\mathbb{A}_k^1,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ を満たすが, $H_{\text{ét}}^i(U,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ はこの性質を持たない[22]. 定理 18 を $n=p$ の場合に拡張することは興味深い問

題であるが，このためにはモチフィックコホモロジーの理論自体をホモトピー不変性をもたない新理論へと拡張する必要があるだろう ([KeS5] 参照).

ここで Bloch の高次チャウ群と Suslin ホモロジーの定義，およびそれらと Voevodsky[V1] が定義したモチフィック (コ) ホモロジーとの比較を復習する．まず位相空間 X の特異ホモロジー群

$$H_q(X,\mathbb{Z}) := H_q(s(X,\bullet))$$

を復習しておこう．ここで $s(X,\bullet)$ は特異チェイン複体と呼ばれるアーベル群の複体

$$\cdots \to s(X,q) \xrightarrow{\partial} s(X,q-1) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} s(X,0)$$

で，その次数 q の項は

$$s(X,q) = \bigoplus_{\Gamma} \mathbb{Z}[\Gamma] \quad (\Gamma \text{ はすべての連続写像 } \Delta^q_{top} \to X \text{ をわたる})$$

で与えられる．ここで

$$\Delta^q_{top} = \Big\{(x_0,x_1,\cdots,x_q) \in \mathbb{R}^{q+1} \;\Big|\; \sum_{0\leqq i\leqq q} x_i = 1,\ x_i \geqq 0\Big\}$$

は位相的特異単体で，境界写像 ∂ は Δ^q_{top} の面への制限写像の交代和である．

Bloch の高次チャウ群と Suslin ホモロジーの定義は位相空間の特異ホモロジーの代数的類似を辿る．ここでは X は体 k 上分離的有限型なスキームとする[23)]．位相的特異単体 Δ^q_{top} の代数的類似は

$$\Delta^q = \mathrm{Spec}\big(k[t_0,\cdots,t_q]/(\sum_{i=0}^{q} t_i - 1)\big)$$

で，$\Delta^s = \{t_{i_1} = \cdots = t_{i_{q-s}} = 0\} \subset \Delta^q$ がその面である．$s(X,q)$ の類似は 2 種類あって，$X\times\Delta^q$ 上の代数的サイクルの空間たち

$$z^r(X,q) = \bigoplus_{\Gamma\subset X\times\Delta^q} \mathbb{Z}[\Gamma], \quad c_0(X,q) = \bigoplus_{\Xi\subset X\times\Delta^q} \mathbb{Z}[\Xi]$$

である．ここで r は固定された自然数で Γ は $X\times\Delta^q$ 上の余次元 r の閉部分整スキームですべての面 $\Delta^s\subset\Delta^q$ と正しく交わるもの全体をわたり，Ξ は $X\times\Delta^q$ の閉部分整スキームで $\Xi\to\Delta^q$ が有限かつ全射であるもの全体をわたる．気持ちとしては，Γ や Ξ としてスキームの射 $f:\Delta^q\to X$ を考えたいところだが，これでは正しいコホモロジー群を生み出すことはできない[24)].

これらから，位相空間の特異チェイン複体の類似であるサイクル複体

$$z^r(X,\bullet)\ :\ \cdots \to z^r(X,q) \xrightarrow{\partial} z^r(X,q-1) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} z^r(X,0),$$

$$c_0(X,\bullet)\ :\ \cdots \to c_0(X,q) \xrightarrow{\partial} c_0(X,q-1) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} c_0(X,0)$$

が生じる．Bloch の高次チャウ群と Suslin ホモロジーは，サイクル複体たちのホモロジー群

$$\mathrm{CH}^r(X,q) := H_q\big(z^r(X,\bullet)\big), \quad H^S_q(X,\mathbb{Z}) := H_q\big(c_0(X,\bullet)\big)$$

として定義される．また有限係数バージョンが以下のように定義される．

$$\mathrm{CH}^r(X,q;\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) := H_q\big(z^r(X,\bullet)\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\big),\quad H_q^S(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) := H_q\big(c_0(X,\bullet)\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\big)$$

Voevodsky[V1] はモチーフの三角圏を用いてモチフィックコホモロジー $H^i_M(X,\mathbb{Z}(r))$ およびモチフィックホモロジー $H_i^M(X,\mathbb{Z}(r))$ の定義を与えた．X が k 上滑らかなら比較同型

$$H_i^M(X,\mathbb{Z}(0))\cong H_i^S(X,\mathbb{Z}),\quad H^i_M(X,\mathbb{Z}(r))\cong \mathrm{CH}^r(X,2r-i).$$

が成り立つ．定理 18 は，以下の補題とモチフィックコホモロジー理論のいくつかの深い事実を用いて定理 17 から導かれる．

補題 1 有限体上有限型で正則な d 次元スキーム X にたいし次の長完全系列が存在する．

$$\cdots\to KH_{2d-i+2}(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\to H^i_M(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d))\to H^i_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d))\to KH_{2d-i+1}(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\to\cdots$$

ここで $H^i_M(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d))=\mathrm{CH}^d(X,2d-i;\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ は有限係数モチフィックコホモロジーである．

補題の証明には，近年 Rost と Voevodsky により証明された Bloch-加藤予想 ([V2], [SJ]) とその帰結である Beilinson-Lichtenbaum 予想 ([SV2], [GL]) が用いられる．補題のエタールコホモロジーは有限群であることが知られている．よって加藤予想からモチフィックコホモロジーの有限性が従うことになる．これは有限次代数体のイデアル類群の有限性 (Minkowski の定理) や単数群の有限生成性 (Dirichlet の定理) の高次元化とみれる．

10 ゼータ関数の特殊値への応用

定理 17 のゼータ関数の特殊値の問題への応用を紹介する (定理 19)．もともとモチフィックコホモロジーがゼータ関数の特殊値の問題にその研究の動機を発していたことを考えるとこのような応用は自然である．モチフィックコホモロジーを用いたゼータ関数の特殊値の表示については多くの研究が為されている．これについては Geisser による優れた解説 [G3] を参照されたい．

解析的類数公式

$$\lim_{s\to 0}\zeta_K(s)\cdot s^{-\rho_0} = -\frac{|Cl(K)|\cdot R_K}{|(\mathcal{O}_K^\times)_{\mathrm{tors}}|} \tag{28}$$

から話を始める．ここで $\zeta_K(s)$ は有限次代数体 K のデデキントのゼータ関数で，ρ_0 は $\mathcal{O}_K$ の単数群 $\mathcal{O}_K^\times$ のアーベル群としての階数である．$(\mathcal{O}_K^\times)_{\mathrm{tors}}$ は $\mathcal{O}_K^\times$ のねじれ部分群 (つまり K に含まれる 1 のべき乗根全体のなす群) である．また $Cl(K)$ は K のイデアル類群で，R_K はディリクレの単数基準 (レギュレーター) である．解析的類数公式をモチフィックコホモロジーを用いることにより "数論的な指数定理" と見ることができる．一般に指数定理とは次の形をしている．

指数 (解析的不変量)	=	特性類 (たとえば オイラー標数)

$X=\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ とすれば (28) の右辺に現れる代数的不変量がモチフィックコホモロジーを用いて

$$Cl(K)=H^2_M(X,\mathbb{Z}(1)),\quad \mathcal{O}_K^\times = H^1_M(X,\mathbb{Z}(1))$$

と解釈できる[25)]．よって解析的類数公式 (28) はモチフィックコホモロジーを用いて

$$\lim_{s\to 0}\zeta(X,s)\cdot s^{-\rho_0}=-\frac{|H^2_M(X,\mathbb{Z}(1))|}{|H^1_M(X,\mathbb{Z}(1))_{\mathrm{tors}}|}\cdot R_K$$

と書き換えることができる．R_K についてもモチフィックコホモロジーから Deligne コホモロジーへの "普遍的なレギュレーター写像"として解釈できる (例えば [N] 参照)．以下の定理 19 は解析的類数公式の幾何的類似と見ることができる．

以下，X を有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の射影的で正則な多様体とする．X の合同ゼータ関数

$$\zeta(X,s)=\exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|X(\mathbb{F}_{q^n})|\ \frac{q^{-ns}}{n}\Big)\quad(s\in\mathbb{C})$$

を考える．整数 $r\in\mathbb{Z}$ にたいしその特殊値が以下で定義される (合同ゼータ関数の有理性より $\zeta(X,r)^*$ は有理数である)．

$$\zeta(X,r)^*:=\lim_{s\to r}\zeta(X,s)\cdot(1-q^{r-s})^{\rho_r}\quad(\rho_r:=-\mathrm{ord}_{s=r}\zeta(X,s))$$

定理 19 ([KeS1]) $d=\dim(X)$，$p=\mathrm{ch}(\mathbb{F}_q)$ とおく．全ての整数 i にたいし，モチフィックコホモロジー $H^i_M(X,\mathbb{Z}(d))$ のねじれ部分群 $H^i_M(X,\mathbb{Z}(d))_{\mathrm{tors}}$ は p べき部分を除外すれば有限で，次の等式が p べき部分を無視して成り立つ

$$\zeta(X,0)^*=\pm\prod_{1\leqq i\leqq 2d}\Big|H^i_M(X,\mathbb{Z}(d))_{\mathrm{tors}}\Big|^{(-1)^i}.$$

さらに，$d\leqq 4$ なら上の事実は p べき部分を含めて成立する．

定理 19 に Dirichlet のレギュレーター R_K の類似が登場しないのは，$H^i_M(X,\mathbb{Z}(d))$ が $i=2d$ を除いて[26)] 有限群であるという予想 (Parshin 予想) に由来する．宮崎 ([Mi]) は定理 19 を X が有限体上の (固有的でも滑らかでもない) 有限型スキームの場合に拡張した．

11 高次元ハッセ原理の特異点論への応用

高次元ハッセ原理の (意外な) 応用として幾何学的問題への応用を解説する．幾何学的問題とは，商特異点の解消に現れる例外因子の双対複体のホモトピータイプに関するものである．

X を完全体 k 上の準射影的で正則な多様体とし，有限群 G の X への作用が与えられているとする．商多様体 X/G の特異点のなす閉部分集合を Z で表す．k 上の正則な多様体 $\widetilde{Y}$ と固有的かつ双有理的な射 $g:\widetilde{Y}\to X/G$ であって Z の外では同型で (被約化された) 例外集合 $E=g^{-1}(Z)_{red}$ が $\widetilde{Y}$ 上の単純正規交差因子であるものが存在すると仮定する (広中の定理により $\mathrm{ch}(k)=0$ ならこのような特異点解消は常に存在する)．E の双対複体 $\Gamma(E)$ とは CW-複体[27)] であってその a-単体が

$$E^{[a]}=\coprod_{1\leq i_0<i_1<\cdots<i_a\leq N}E_{i_0}\cap\cdots\cap E_{i_a}$$

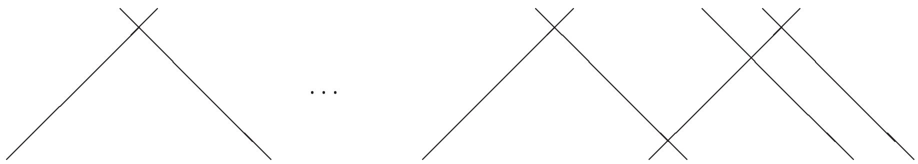
の連結成分に対応するものである．ここで $E_1,\ldots,E_N$ は E の既約成分全体である．

典型例として Klein 商特異点 $\mathbb{C}^2/G$ を考える．ここで G は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の部分群で $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}=\mathbb{C}^2$ 上に線

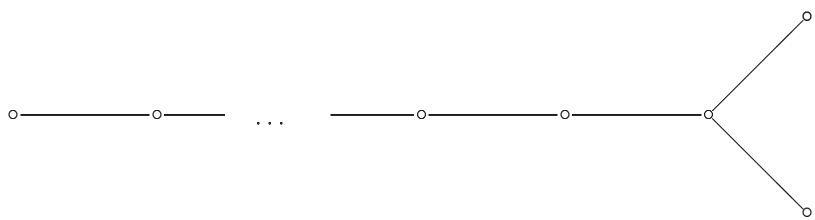
型に作用する．$\mathbb{C}^2$ の原点の像 $0 \in \mathbb{C}^2/G$ は $\mathbb{C}^2/G$ の唯一の特異点である．最小特異点解消 $g : \widetilde{Y} \to \mathbb{C}^2/G$ が存在し, その例外因子 $E = g^{-1}(0)$ の既約成分は全て有理曲線で, それらがなす形状はDynkin図形で表される．例として binary dihedral 群

$$G = \left\langle \sigma, \tau \mid \sigma^n = 1,\ \tau^2 = -1,\ \tau\sigma\tau = -\sigma^{-1} \right\rangle$$

を考えると，E の既約成分は形状は



のごとくで $(n+2)$ 本の有理曲線からなる．その双対複体 $\Gamma(E)$ は



のごとくで $(n+2)$ 個の頂点と $(n+1)$ 本の辺からなる．

McKay は一般の $G \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ にたいし $\Gamma(E)$ と所謂 McKay グラフの間の神秘的な対応を発見した．McKay グラフは G の既約表現についての情報で決まるものである．この事実を高次元へ拡張する試みが，McKay 対応とよばれる豊かな研究分野を開拓している．詳しくは Reid による秀逸な解説 [Re] を参照されたい．ここで彼が提出したスローガンを引用する．

McKay 原理: X，G，$g : \widetilde{Y} \to X/G$ をこの節の最初のとおりとする．このとき $\widetilde{Y}$ についての ‘意味のある’ 幾何学的問題は，X についての G-同変幾何学の言葉で答えられる．

高次元ハッセ原理の応用として，$\Gamma(E)$ のホモトピータイプ[28) にたいする McKay 原理ともいえる結果 (定理 20) を紹介する．X，G をこの節の最初のとおりとし，$\pi : X \to X/G$ を射影とする．k 上固有的な被約閉部分スキーム $S \subset X/G$ で X/G の特異点を全て含むものを固定し $T = \pi^{-1}(S)_{red}$ とおく．さらに以下のデータが与えられているとする．

- k 上の正則な多様体 $\widetilde{Y}$ と固有的かつ双有理的な射 $g : \widetilde{Y} \to X/G$ で，S の外では同型で $E_S = g^{-1}(S)_{red}$ が $\widetilde{Y}$ 上の単純正規交差因子であるもの．
- G の作用が与えられた k 上の正則な多様体 $\widetilde{X}$ と固有的かつ双有理的な G-同変的射 $f : \widetilde{X} \to X$ で，T の外では同型で $E_T = f^{-1}(T)_{red}$ が $\widetilde{X}$ 上の G-完全な[29) 単純正規交差因子なるもの．

$$\begin{array}{ccccccc} \pi^{-1}(S)_{red} = T & \longrightarrow & X & \xleftarrow{f} & \widetilde{X} & \longleftarrow & E_T = f^{-1}(T)_{red} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} & & & & \\ S & \longrightarrow & X/G & \xleftarrow{g} & \widetilde{Y} & \longleftarrow & E_S = g^{-1}(S)_{red} \end{array}$$

射 $\widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ や射 $E_T \to E_S$ の存在は仮定しないことを強調しておく．仮定より有限群 G が CW-複体 $\Gamma(E_T)$ に作用し，商 CW-複体 $\Gamma(E_T)/G$ が生じる．

定理 20 ([KeS2]) $\mathrm{ch}(k) = 0$ または k は完全体で [BM] の意味での強い特異点解消が k 上で成り立つと仮定する．このとき CW-複体のホモトピー圏において自然な射

$$\Psi : \Gamma(E_T)/G \to \Gamma(E_S)$$

が存在して，$\Gamma(E_S)$ と $\Gamma(E_T)/G$ のホモロジー群と基本群の同型を誘導する：

$$\pi_1(\Gamma(E_T)/G) \xrightarrow{\cong} \pi_1(\Gamma(E_S)), \quad H_a(\Gamma(E_T)/G) \xrightarrow{\cong} H_a(\Gamma(E_S)) \quad (a \in \mathbb{Z}),$$

位相幾何の基本的定理 (Whitehead と Hurewicz) により定理 20 は次の系を導く．

系 1 仮定は定理 20 のとおりとする．

- $\Gamma(E_T)/G$ が単連結なら Ψ はホモトピー同値である．
- $\Gamma(E_T)/G$ が可縮なら $\Gamma(E_S)$ も可縮である．

定理 20 の証明のために，有限体上のスキームにたいし定義された加藤ホモロジー (24) を素体上有限生成な体 k 上のスキーム X の加藤ホモロジー $KH_a(X)$ に拡張し定理 17 の類似を示す．これを用いることにより，定理 20 の状況のもとで，商多様体 X/G の加藤ホモロジー $KH_a(X/G)$ が双対複体のホモロジー群 $H_a(\Gamma(E_S))$ の情報を含むことが示される．これにより定理 20 が加藤ホモロジーにたいする McKay 原理に言い換えられてこれを示すのである．

注　　釈

1) ‘有限エータル’ はスキームの射にたいする基本的概念である．位相空間の被覆の概念の代数化と思えばよい．
2) $V \to U$ がアーベルであることを幾何学的に表現すれば，V の U 上の自己同型群の位数が V の U 上の次数に等しくさらにそれがアーベル群であることである．
3) 2 次体 $L = \mathbb{Q}(\sqrt{a})$ に付随する Dirichlet 指標と呼ばれる．
4) 右辺には Krull 位相，左辺には副有限群位相が与えられている．
5) チェボタレフの密度定理の高次元化とみれる．
6) 本質的なアイデアは Wiesend[W] による．Kerz-Schmidt[KeSc1] が完全な証明を与えた．
7) X は $\mathbb{Z}$ または $\mathbb{F}_p$ 上固有的で正則なスキームで $X \setminus U$ が X 上の単純正規交差因子であるもの．
8) $\overline{U}$ と $\overline{V}$ は有限次代数体の整数環のスペクトラムあるいは k 上射影的で正則な曲線で j_U と j_V は開埋め込みである．そのようなコンパクト化は必ず存在する．
9) 与えられた U にたいしそのような X は常に存在する．
10) 右辺は Krull 位相，左辺は副有限位相が与えられている．
11) これを明確に述べた文献はいまのところ存在しない．
12) [Se1] においては，$\mathbb{C}$ 上の線形表現を扱っているが ℓ-進表現にも拡張される．
13) $\pi_1^{ab}(U)$ は Krull 位相，$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ は離散位相が与えられている．
14) ただしこの図式から直ちに $\Phi^\vee_{X,D}$ の同型性が $\Phi^\vee_{X,D'}$ の同型性に帰着されるわけではない．
15) 前者は代数的基本群，後者は位相的基本群．
16) 分岐理論の立場からみれば Deligne 予想の順分岐部分である．
17) 体 K 上の多元環 A が単純とは両側イデアルが自明なものしかないことである．A が K 上中心的とは A の中心が K に等しいことである．
18) 制限写像の像が直和に入ることは自明でない．
19) 体のブラウアー群がねじれ群であることを使っている．
20) X での閉包が次元 a である点の集合．$x \in X$ にた

いし，$x \in X_{(a)}$ であることと，$\kappa(x)$ が有限体上の超越次数 a の関数体あるいは有理数体上の超越次数 $a-1$ の関数体であることは同値である．

21)　この仮定は加藤ホモロジーの定義を若干修正することにより除くことができる．X が有限体上なら n に無関係に仮定は満たされる．

22)　ホモトピー不変性はモチフィックコホモロジーがもつ基本的な性質である．

23)　Dedekind 環上有限型なスキームにたいしても定義されるが少々複雑になる．

24)　射 f のグラフを考えれば $X \times \Delta^q$ 上の代数的サイクルと見られるが，射のグラフだけでは十分でない．

25)　Voevodsky のモチフィックコホモロジーは体上有限型なスキームにたいし定義されている．ここでのモチフィックコホモロジーは Bloch の高次チャウ群により定義したものである．

26)　$i = 2d$ の場合，$H^{2d}_M(X, \mathbb{Z}(d)) = \mathrm{CH}_0(X)$ で，定理 8 よりこれは $\mathbb{Z}$ と有限群の直和である．

27)　[Hat, Section 2.1] の意味で Δ-複体である．

28)　これは特異点解消 g の取り方によらないことが知られている ([St], [ABW], [Pay], [Th])．

29)　E の既約成分 E_i と $g \in G$ にたいし $g(E_i) = E_i$ または $g(E_i) \cap E_i = \emptyset$ が成り立つことである．

文　　献

[ABW]　D. Arapura, P. Bakhtary, J. WlodarcZyk, *Weights on cohomology, invariants of singularities, and dual complexex*, Math. Ann. **357** (2013) 513–550.

[AS]　A. Abbes and T. Saito, *Ramification and cleanliness*, Tohoku Mathematical Journal, Centennial Issue, 63 No. 4 (2011), 775-853.

[B1]　S. Bloch, *Higher Algebraic K-theory and class field theory for arithmetic surfaces*, Ann. of Math. **114** (1981), 229–265.

[B2]　S. Bloch, *Algebraic cycles and higher algebraic K-theory*, Adv. Math. **61** (1986), 267–304.

[BM]　E. Bierstone, P. D. Milman, *Canonical desingularization in characteristic zero by blowing up the maximum strata of a local invariant.* (English summary) Invent. Math. 128 (1997), no. 2, 207–302.

[CT]　J.-L. Colliot-Thélène, *On the reciprocity sequence in the higher class field theory of function fields*, Algebraic K-Theory and Algebraic Topology (Lake Louise, AB, 1991), (J.F. Jardine and V.P. Snaith, ed), 35–55, Kluwer Academic Publishers, 1993.

[CTSS]　J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc and C. Soulé, *Torsion dans le groupe de Chow de codimension deux*, Duke Math. J. **50** (1983), 763–801.

[D]　P. Deligne, *La conjecture de Weil II*, Publ. Math. IHES **52** (1981), 313–428.

[Dr]　V. Drinfeld, *On a conjecture of Deligne*, Volume dedicated to the memory of M.Gelfand. Moscow Math. J. **12** (2012) no. 3.

[dJ]　J. de Jong, *Smoothness, semi-stability and alterations*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **83** (1996), 51–93.

[EK]　H. Esnault, M. Kerz, *A finiteness theorem for Galois representations of function fields over finite fields (after Deligne)*, Acta Mathematica Vietnamica **37**, Number 4 (2012), p. 351–362.

[G1]　T. Geisser, *Arithmetic homology and an integral version of Kato's conjecture*, J. Reine Angew. Math. **644** (2010), 1–22.

[G2]　T. Geisser, *On Suslin's homology and cohomology*, Documenta Math. Extra Volume: Andrei Suslin's Sixtieth Birthday (2010), 223–249.

[G3]　T. Geisser, モチビック・コホモロジー，その応用と重要な予想, 数学 (2014) に掲載予定.

[GL]　T. Geisser and M. Levine, *The Bloch-Kato conjecture and a theorem of Suslin-Voevodsky*, J. Reine Angew. **530** (2001), 55–103.

[Hat]　A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[ILO]　L. Illusie, Y. Laszlo, F. Orgogozo, *Travaux de Gabber sur l'uniformisation locale et la cohomologie étale des schemas quasi-excellents. Séminaire a l'Ecole polytechnique 2006–2008*, arXiv:1207.3648.

[J]　U. Jannsen, *Hasse principles for higher dimensional fields*, arXiv:0910.2803.

[JS1]　U. Jannsen and S. Saito, *Kato homology of arithmetic schemes and higher class field theory*, Documenta Math. Extra Volume: Kazuya Kato's Fiftieth Birthday (2003), 479–538.

[JS2]　U. Jannsen and S. Saito, *Kato conjecture and motivic cohomology over finite fields*, arXiv:0910.2815.

[K1]　K. Kato, *A generalization of local class field theory by using K-groups I*, J. Fac. Sci. Iniv. Tokyo, Sect. IA **26** (1979) 403–376, II, ibid., **27** (1980), 603–683, III, ibid., **29** (1982), 31–43.

[K2]　K. Kato, *A Hasse principle for two dimensional global fields*, J. für die reine und angew. Math. **366** (1986), 142–183.

[K3]　K. Kato, *Swan conductors for characters of degree one in the imperfect residue field case*, Comtemp. Math., **83** (1989) 101–1331 .

[KS1]　K. Kato and S. Saito, *Unramified class field theory of arithmetic surfaces*, Ann. of Math. **118** (1985), 241–275.

[KS2]　K. Kato and S. Saito, *Global class field theory of arithmetic schemes*, Contemporary Math. **55**(1986), 255–331.

[KelS]　S. Kelly and S. Saito, *Weight homology of motives*, in preparation.

[KeSc1]　M. Kerz and A. Schmidt *Covering data and higher dimensional global class field theory* J. of Number Theory **129** (2009), 2569–2599.

[KeSc2]　M. Kerz and A. Schmidt *On different notions of tameness in arithmetic geometry* Math. Annalen **346** (2010), 641–648.

[KeS1]　M. Kerz and S. Saito, *Cohomological Hasse principle and motivic cohomology for arithmetic* *schemes*, Publ. Math. IHES **115** (2012), 123–183.

[KeS2] M. Kerz and S. Saito, *Cohomological Hasse principle and resolution of quotient singularities*, New York J. Math. **19** (2014), 597–645.

[KeS3] M. Kerz and S. Saito, *Chow group of 0-cycles with modulus and higher dimensional class field theory*, arXiv:1304.4400.

[KeS4] M. Kerz and S. Saito, *Lefschetz theorem for abelian fundamental group with modulus*, Algebra and Number Theory **8** (2014), 689–702 .

[KeS5] M. Kerz and S. Saito, *Motivic complex with modulus and regulator maps*, in preparation.

[KKS] 加藤和也・黒川信重・斎藤毅, 数論II, 岩波講座 現代数学の基礎 **10**, 岩波書店

[Laf] L. Lafforgue, *Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands*, Invent. Math. **114** (2002) 1-241.

[Lan1] S. Lang, *Unramified class field theory over the function fields in several variables*, Ann. Math. **64** (1956) 285–325.

[Lan2] S. Lang, *Sur les séries L d'une variété algébrique*, Bull. Soc. Math. France **84** (1956) 385–401.

[Ma] S. Matsuda, *On the Swan conductors in positive characteristic*, Amer. J. Math., **119** (1997) 705–739.

[Mi] H. Miyazaki, *Special values of zeta functions of singular varieties over finite fields via Bloch's higher Chow groups*, preprint.

[N] J. Neukrich, *The Beilinson conjecture for algebraic number fields*, in: Beilinson's conjectures on special values of L-functions, edts. M Rapoport, P. Schneider, N. Schappacher, Perspectives in Math. **4** (1988) 193–248.

[Par1] A. N. Parsin, *Class fields and algebraic K-theory*, Uspehi. Mat. Nauk. **30** No. 1 (1975) 253–254.

[Par2] A. N. Parsin, *On the arithmetic of two dimensional schemes, I, Repartitions and residues*, Izv. Akad. Nauk. Armjan, SSR Ser. Mat. **40** (1976) 736–773, English transl. in Math. U.S.S.R. Izv., **10** (1976) 695–747.

[Pay] S. Payne, *Boundary complexes and weight filtrations*, Michigan Math. J. **62**, Issue 2 (2013), 225-448.

[Re] M. Reid, *La correspondance de McKay*, Séminaire Bourbaki, 52ème année, novembre 1999, no. 867, Astérisque **276** (2002), 53–72.

[Sa1] S. Saito, *Unramified class field theory of arithmetic schemes*, Ann. of Math. **121** (1985), 251–281.

[Sa2] S. Saito, *Recent progress on the Kato conjecture*, in: Quadratic forms, linear algebraic groups, and cohomology, Developments in Math. **18** (2010), 109–124.

[Sa3] 斎藤秀司, 高次元ハッセ原理と類体論の一般化 (Cohomological Hasse principle and higher dimensional class field theory), 数理研講究録別冊 (RIMS Kokyuroku Bessatsu)

[SaT] T. Saito, *Wild ramification and the cotangent bundle*, arXiv:1301.4632.

[Sc] A. Schmidt, *Singular homology of arithmetic schemes* Algebra Number Theory **1** (2007), 183–222.

[ScSp] A. Schmidt and M. Spiess, *Singular homology and class field thoery of varieties over finite fields* J. Reine Angew. Math. **527** (2000), 13–37.

[Se1] J.-P. Serre, *Corps Locaux*, Hermann, Paris 1968.

[Se2] J.-P. Serre, *Groupes algébriques et corps de classes*, Publ. Inst. Math. Nancago, Hermann, Paris 1959.

[Se3] J.-P. Serre, *Zeta and L-functions*, In: Arithmetic algebraic geometry, Harper and Row, New York (1963), 82–92.

[SJ] A. Suslin and S. Joukhovitski, *Norm Varieties* J. Pure Appl. Alg. **206** (2006), 245–276.

[SS] S. Saito and K. Sato, *A finiteness theorem for zero-cycles over p-adic fields*, Annals of Math. **172** (2010), 593–639.

[St] D. Stepanov, *A note on the dual complex associated to a resolution of singularities*, Uspekhi Mat. Nauk. **61** (2006), 185–186.

[SV1] A. Suslin and V. Voevodsky, *Singular homology of abstract algebraic varieties* Invent. Math. **123** (1996), 61–94.

[SV2] A. Suslin and V. Voevodsky, *Bloch-Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients*, in: The Arithmetic and Geometry of Algebraic Cycles NATO Science Series **548** (2000), 117–189.

[Sw] N. Suwa, *A note on Gersten's conjecture for logarithmic Hodge-Witt sheaves*, K-theory **9** (1995), 245–271.

[Th] A. Thuillier, *Géométrie toroidale et géométrie analytique non archimédienne.* Manuscripta Math. 123 (2007) **4**, 381–451.

[V1] V. Voevodsky, *Triangulated categories of motives over a field*, Cycles, Tansfers, and Motivic Homology Theories, Annals of Math. Studies, Princeton University Press, 2000

[V2] V. Voevodsky, *On motivic cohomology with $\mathbb{Z}/\ell$-coefficients*, Ann. of Math. (2) 174 (2011), no. 1, 401–438.

[W] G. Wiesend, *Class field theory for arithmetic schemes*, Math. Z. **256**(4) (2007), 717–729.

[SGA1] A. Grothendieck, *Revêtements etales et groupe fondamental (SGA1)*, Lecture Notes in Math. **224**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.