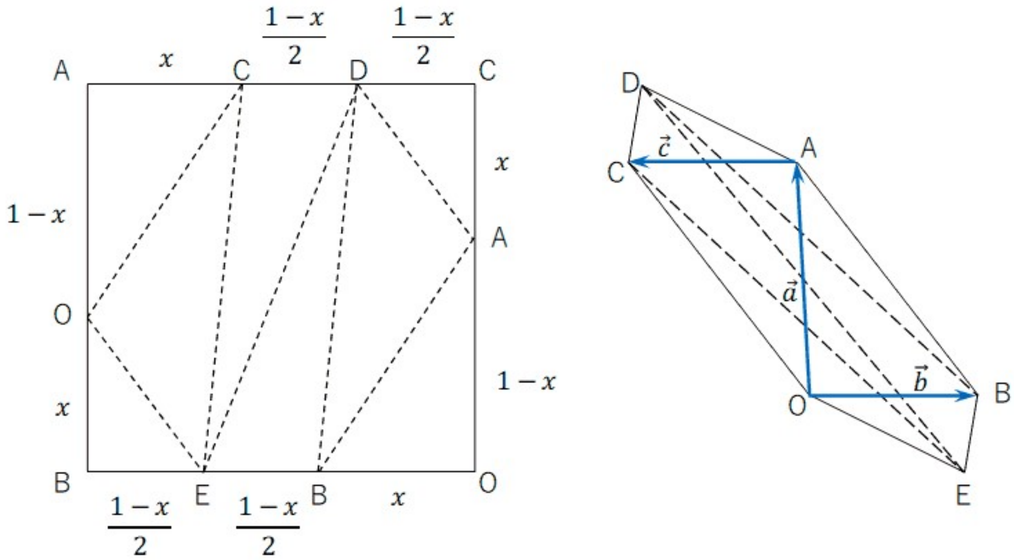
「正方形を展開図とする体積最大の多面体」の寸法の計算



※左の展開図と右の立体図は縮尺、比率を合わせていません

xを自由パラメータとして、折り目の位置と頂点の名前を図のように定めます。
折り目の長さはいずれも三平方の定理により、

$$\overline{AD}=\overline{OE}=\sqrt{x^2+\left(\frac{1-x}{2}\right)^2}\ ,\quad \overline{BD}=\overline{CE}=\sqrt{1+\left(x-\frac{1-x}{2}\right)^2}\ ,\quad \overline{ED}=\sqrt{1+x^2}$$

などとなります。

図にある通り、ベクトル $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とします。
展開図（の頂点にあること）より、 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ になります。
また $\vec{b}\cdot\vec{c}=x^2\cos\theta$ としておきます。（現時点では θ の具体的な値は未知です）

ベクトル $\overrightarrow{AD}=k_1\vec{a}+k_2\vec{b}+k_3\vec{c}$ とおきます。
初めに $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\vec{c}$ かつ $\overrightarrow{CD}\cdot\vec{c}=0$ より

$$k_2x^2+(k_3-1)\,x^2\cos\theta=0\quad\Rightarrow\quad k_3=1-k_2\cos\theta \tag{1}$$

となります。それから

$$\left|\overrightarrow{AD}\right|^2=k_1^2(1-x)^2+k_2^2x^2+k_3^2x^2+2k_2k_3x^2\cos\theta=x^2+\left(\frac{1-x}{2}\right)^2$$

で、これに式（1）を代入して整理すると、

$$k_1^2(1-x)^2+k_2^2x^2\sin^2\theta=\left(\frac{1-x}{2}\right)^2 \tag{2}$$

が得られます。

同様に $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\vec{a}-\vec{b}$ より、式（1）を使って整理すると

$$\left|\overrightarrow{BD}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AD}\right|^2 + (1-x)^2 + x^2 + 2\overrightarrow{AD}\cdot\vec{a} - 2\overrightarrow{AD}\cdot\vec{b}$$

$$= x^2 + \left(\frac{1-x}{2}\right)^2 + (1-x)^2 + x^2 + 2k_1(1-x)^2 - 2x^2\left(k_2 + k_3\cos\theta\right) = 1 + \left(x - \frac{1-x}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad k_1(1-x)^2 - k_2x^2\sin^2\theta = x^2\cos\theta + \frac{x}{2}(1-x) \tag{3}$$

さらに、 $\overrightarrow{OE} = -k_1\vec{a} + k_2\vec{c} + k_3\vec{b}$ （ベクトル $\overrightarrow{AD}$ の $\vec{a}$ を $-\vec{a}$ に変え、 $\vec{b}$ と $\vec{c}$ を入れ替えたもの）、 $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AD} + \vec{a} - \overrightarrow{OE} = (1+2k_1)\,\vec{a} + (k_3 - k_2)\left(\vec{c} - \vec{b}\right)$ より、

$$\left|\overrightarrow{ED}\right|^2 = (1+2k_1)^2(1-x)^2 + (k_3-k_2)\cdot 2x^2\left(1-\cos\theta\right) = 1 + x^2$$

$$\Rightarrow \quad \left(k_1 + k_1^2\right)(1-x)^2 + \left(-k_2\sin^2\theta + k_2^2\frac{1+\cos\theta}{2}\sin^2\theta\right)x^2 = \frac{x^2}{2}\cos\theta + \frac{x}{2}(1-x)$$

となりますが、これから式（２）と式（３）を引くことにより、

$$k_2^2x^2\frac{-1+\cos\theta}{2}\sin^2\theta = -\frac{x^2}{2}\cos\theta - \left(\frac{1-x}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad k_2 = \frac{1}{x\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}}\sqrt{\frac{x^2}{2}\cos\theta + \left(\frac{1-x}{2}\right)^2} \tag{4}$$

が得られます。

任意の x に対して、式（４）→（３）→（２）を満たすような θ の値を反復法（割線法）で計算することができます。

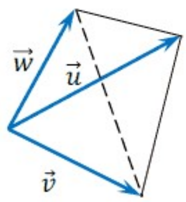
角度 θ が求まれば、式（４）→（３）→（１）の順で、未知係数 $k_1,\ k_2,\ k_3$ も計算できます。

（※ただしこの方法、 $x > 0.63$ 辺りからは反復が失敗して上手くいきません。
今回の最大の体積を求めるのには支障ありませんが‥）

次に体積の計算ですが、３本の空間ベクトル

$$\vec{u} = u_1\vec{a} + u_2\vec{b} + u_3\vec{c}, \quad \vec{v} = v_1\vec{a} + v_2\vec{b} + v_3\vec{c}, \quad \vec{w} = w_1\vec{a} + w_2\vec{b} + w_3\vec{c}$$

が作る下図の４面体の体積は



$$\frac{1}{6}\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = \det\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}\cdot\frac{1}{6}\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \det\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}\cdot\frac{1}{6}x^2(1-x)\sin\theta$$

となります（ただし、ベクトル３つ組の並べ順に気を付ける必要があります）。

そこで元の多面体を４つの４面体（O-ABC、O-CBE、D-ACB、C-BCE）に分けて考えると、
O-CBEとD-ACBは合同なのでO-CBEを２倍することにして、
以下の式で体積を計算することができます。

$$V=\left(\det\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{vmatrix}+2\det\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&0\\-k_1&k_3&k_2\end{vmatrix}+\det\begin{vmatrix}-(1+k_1)&1-k_2&-k_3\\-k_1&-k_2&1-k_3\\-(1+2k_1)&k_3-k_2&-(k_3-k_2)\end{vmatrix}\right)\cdot\frac{1}{6}x^2(1-x)\sin\theta$$

$$=(2+2k_1+k_2-k_3)(k_2+k_3)\cdot\frac{1}{6}x^2(1-x)\sin\theta \tag{5}$$

これが最大となる x の値を数値計算（黄金分割法）で求めた結果、
$x=0.49202$ で $V_{max}=0.0558468$ という結果を得ました。

$x=0.5$ では $V=0.0558332$ なので、最大値より0.024%だけ小さいようです。

2018-07-29　大村

e-mail: o-tets@s6.dion.ne.jp