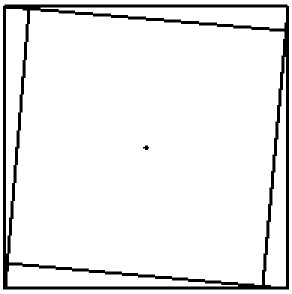
正五角形から作る、ロックする五角錐について（案）

2019/03/15　大村 哲朗

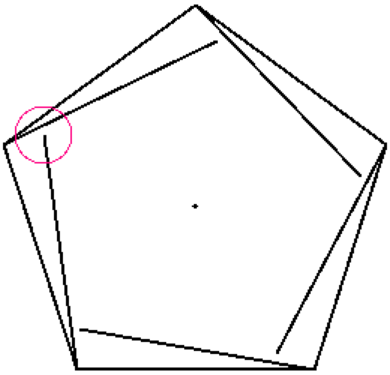
初めに、正方形から作る四角錐のロック機構と、それがなぜ五角形で働かないのかを考えてみました。



簡単のため、当分のあいだ、角錐を角柱で近似して考えます。左の図は、四角柱を上から見たところを表しています。

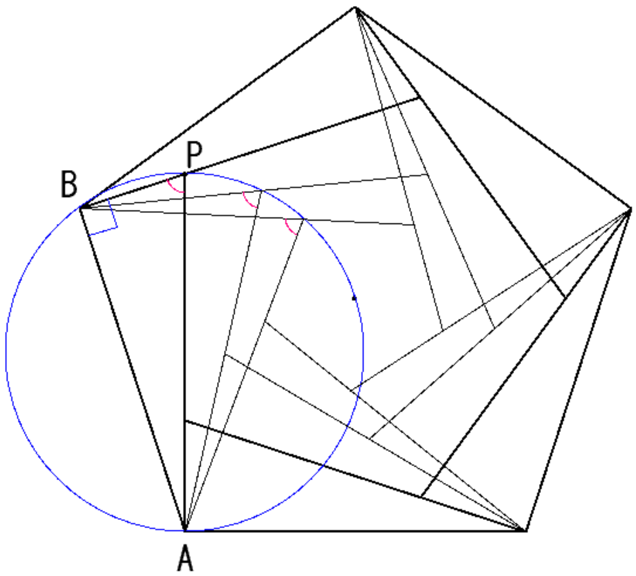
中に折り込まれた部分（以下、フラップと呼びます）は側面に沿うように折り込まれていますが、紙の弾力で内側に開こうとします。四角形ではこのときフラップの先端が隣のフラップに接触し、互いに押さえ合って開くのを阻止していると考えられます。

（これは実際に模型を作って確かめました。）



一方五角形では、各頂点が鈍角なので、フラップが内側に開くと隣のフラップから離れてしまい、抑えが利きません。その結果、フラップが開いてしまい、ロックできないようです。

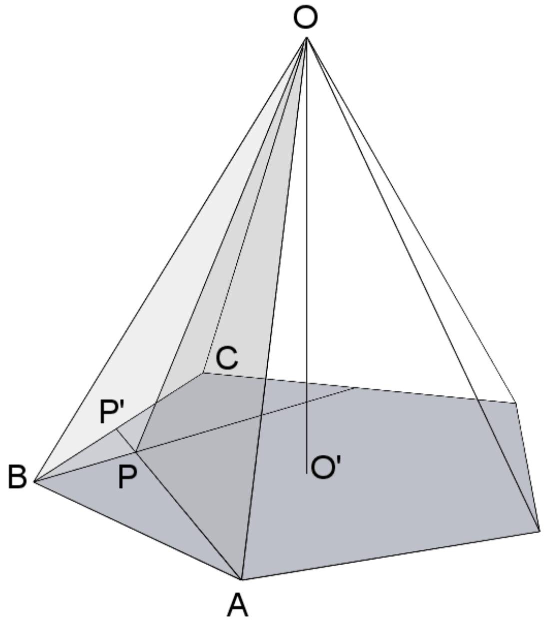
そこで、フラップの長さを伸ばすことを考えました。



左の図の通り、フラップの角度を色々変えて動かしてみると、赤で示した部分の角度が常に72°になることから、フラップ先端の接触点は青で示した円上にあることが分かります（円周角の定理）。

すると、太い線で示した∠ABP＝90°のとき、フラップ AP の長さが最大になるので、この長さでフラップを設計すれば、ロック機構が成立すると考えました。

以上は角柱での議論でしたが、角錐ではフラップの回転軸が斜めなので、図がもう少し複雑になります。作図での求解は諦め、数値計算によりフラップが最大幅となる条件を探すことにしました。



底面の正五角形の一辺の長さを1、五角錐の高さを hとしします。

ベクトルを以下のように定めます。

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}\,, \qquad \overrightarrow{BC} = \vec{b}\,, \qquad \overrightarrow{O'O} = h\vec{z}$$

また黄金比を $\gamma = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$ とすると

$$\overrightarrow{OA} = -\frac{1}{\gamma+2}\vec{a} - \frac{\gamma+1}{\gamma+2}\vec{b} - h\vec{z}$$

$$\overrightarrow{OB} = \frac{\gamma+1}{\gamma+2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right) - h\vec{z}$$

さらに s を可変パラメータとして $\overrightarrow{BP'} = s\vec{b}$ 、$\angle PAB = \angle PBP'$ として計算すると、

$$\overrightarrow{AP} = \left\{1 - \frac{s^2}{1+(\gamma-1)s+s^2}\right\}\left(\vec{a}+s\vec{b}\right)$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$

となります。

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (\gamma-1)/2\;, \qquad \vec{a}\cdot\vec{z} = \vec{b}\cdot\vec{z} = 0\,, \qquad |\vec{a}| = \left|\vec{b}\right| = |\vec{z}| = 1$$

より、側面の頂角

$$\angle AOB = \beta(h) = \cos^{-1}\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|} = \cos^{-1}\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|^2}$$

フラップの頂角

$$\angle AOP = \theta(s;h) = \cos^{-1}\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OP}\right|}$$

が計算できます。

展開図が正五角形となる条件

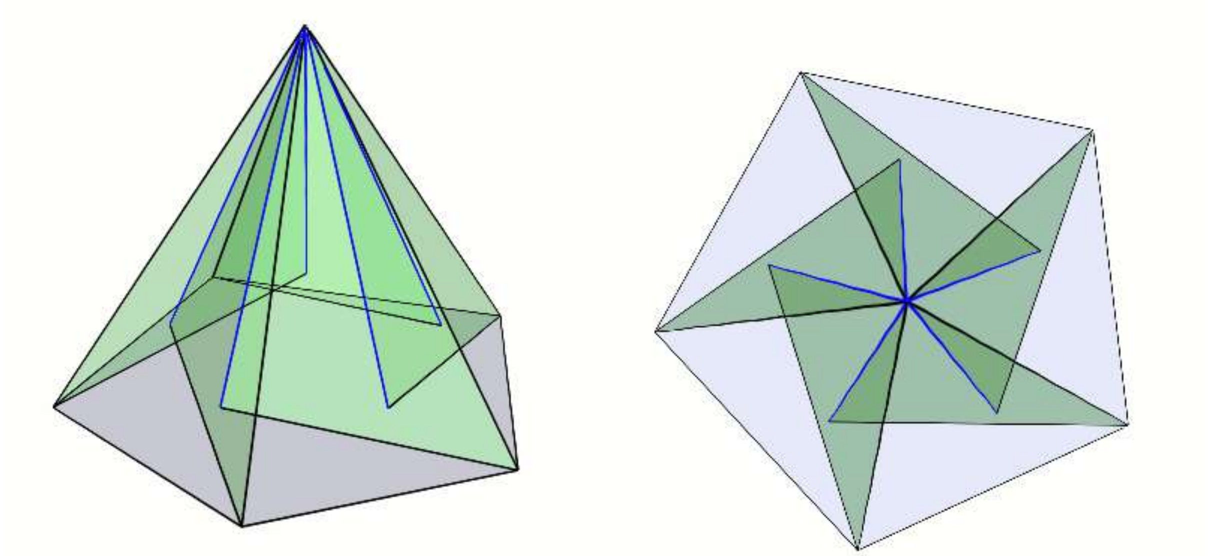
$$\beta + 2\theta = 108°$$

のもとで、最大となるフラップの幅（頂角）

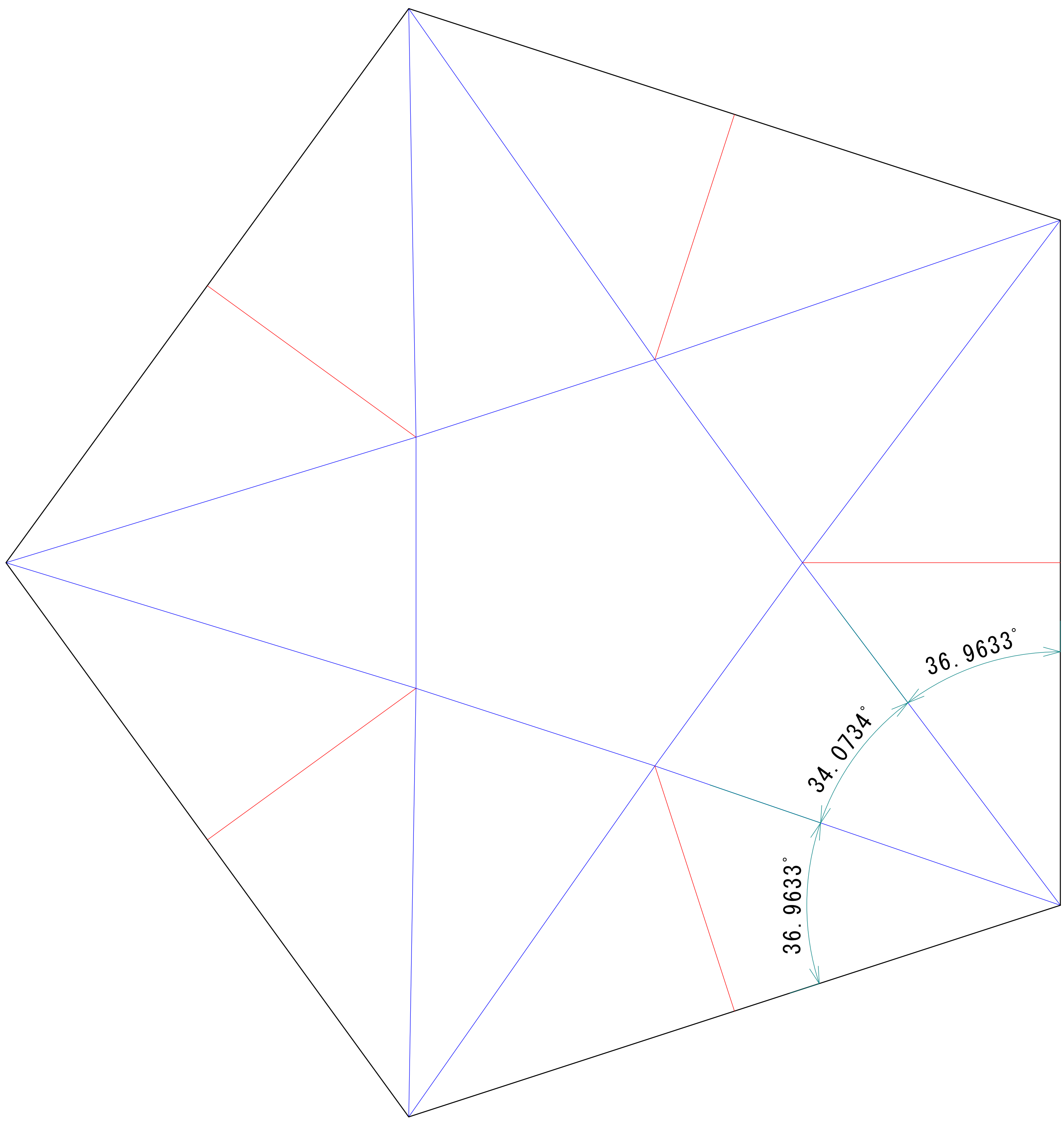
$$\theta(s; h) \to max$$

を、Excel を使った数値計算（割線法と黄金分割法）で求めました。

イメージ図を以下に、また展開図を次のページに示します。
展開図、完成形とも、36°の星型から作ったものとごくわずかな違いしかなく、よく見ないと見分けがつきません。



緑色の部分が内部に折り込んだフラップで、青線のところで隣のフラップに接触し、互いに押さえ合っています。フラップの下端は角錐の底面からは離れています。


36.9633°
34.0734°
36.9633°